234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables

Cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Construction de l'intégrale, propriétés

Fonction mesurable, exemples. intégrale d'une fonction mesurable positive, extension à une fonction quelconque. Fonction intégrable. Cas complexe. Toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions simples.

II) Les grands théorèmes

BEPPO LEVI, FATOU, convergence dominée, application, exemples et contre-exemples.

III) Cas particuliers importants

A) Mesure de DIRAC

B) Mesure de comptage

C) Somme de deux mesures

D) Mesure à densité

IV) Lien avec l'intégrale de riemann

Cas où les intégrales coïncident. Lien entre fonction LEBESGUE-intégrable et convergence de l'intégrale impropre. Exemple. Critère de RIEMANN-intégrabilité.

V) Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p.

Espaces $\mathcal{L}^p$, exemples. Exposants conjugués, inégalité de HÖLDER. Application. Inégalité de MINKOWSKI. Espace L^p. Inclusion dans le cas d'une mesure finie. **DEV** 1 : THÉORÈME DE RIESZ-FISHER. Extraction d'une sous-suite convergeant p.p.. Densité des fonctions étagées et continues à support compact dans L^p. **DEV** 2 : INÉGALITÉ DE HARDY.

VI) Convolution dans L^p

Convolution de deux fonctions, propriétés. Approximation de l'unité. Convergence de la convolée. Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Références :

- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ