

## 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cadre :  $I$  un intervalle réel d'extrémités  $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

### I) Généralités

#### A) Fonction continue

Définition de la continuité en un point. Exemple et contre-exemple. Caractère bornée d'une fonction au voisinage d'un point de continuité. Caractérisation séquentielle. Application. Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $C^0(I, \mathbb{R})$ . Prolongement par continuité. Exemple.

#### B) Fonction dérivable

Définition de la dérivabilité en un point. Dérivable  $\Rightarrow$  continue. Contre-exemple de la réciproque. Fonction dérivée. Exemple de  $D = \emptyset$  où  $f$  est continue. Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $D(I, \mathbb{R})$ . Formule de LEIBNIZ. Développement limité, exemples.

### II) Résultats sur la continuité et dérivabilité

#### A) Théorème des valeurs intermédiaires

TVI, application à  $\mathbb{R}[X]$ , à  $SO_n(\mathbb{R})$ .

#### B) Théorème de HEINE

Définition de l'uniforme continuité, théorème de HEINE, application aux fonction périodique.

#### C) Théorème de ROLLE

Théorème, application à  $f'$  vérifiant le TVI. Théorème des accroissements finis.

#### D) Formules de TAYLOR

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $C^n(I, \mathbb{R})$ . Théorèmes de TAYLOR-LAGRANGE, TAYLOR avec reste intégral. Applications.

### III) Stabilité par passage à la limite (suite de fonctions)

Convergences simple et uniforme, exemples. Limite uniforme d'une fonction continue est continue. Théorème de DINI. Interversions limites intégrale sur un  $I$ . Suites de fonctions  $C^1$ . DEV 1 : STONE-WEIERSTRASS. Application.

### IV) Séries de Fourier

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $C_m^{2\pi}(\mathbb{R})$ . Coefficients et séries de FOURIER. Théorème de DIRICHLET. Exemples. Théorème de BANACH-STEINHAUSS. DEV 2 : SÉRIES DE FOURIER DES APPLICATIONS CONTINUES.

#### Références :

- ROMBALDI
- GOURDON