

(142) Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées.

Applications.

Goblot, Tauvel, Szpirogas
Alg.com

I / Structure d'algèbre

- Définition (Goblot)
Structure d'anneau, de A -module libre
Structure d'algèbre
- Propriété universelle et fonction polynôme (Goblot)
prolongement des identités (\mathbb{R}/\mathbb{C})
- Définition du degré, des dérivées partielles

II / Propriétés arithmétiques

→ Pseudo-division euclidienne

- Factorialité, noethériennité (Sz)
 $A[x_1, \dots, x_n]$ factoriel / noethérien si A l'est
 $R_q: A[[x_i]]$ non noethérien si I infini.
- $K[x_1, x_2]$ non principal
mais $\mathbb{C}[x_1, x_2]/(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ principal.
- Résultant
 - Déf du résultant, premières propriétés.
 - Thm de Bézout
 - Existence de U, V tels que $\text{Res}(A, B) = UA + VB$ ($\text{Res} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)
→ cas de $\mathbb{C}x$ + appl: itéaux premiers et maximaux de $\mathbb{C}[x, y]$

III / Polynômes homogènes

- Déf (Sz), formule d'Euler.
- Thm de Molien (Peyré)
 \mathbb{C} syz de $\mathbb{C} \cup \mathbb{R}$ permet de connaître les degrés autorisés d'une k -base (P_1, \dots, P_n) de $k[x_1, \dots, x_n]^G$.
- Coniques projectives
 - cléf avec pol lian de degré 2 (Andin, RWH)
 - classification
- Théorème de Chevalley-Waring (Seno, cours d'alg)
+ appl: pol homogène \leadsto coniques sur \mathbb{F}_q : au moins un point.

IV / Polynômes symétriques

- Polynômes symétriques et semi-symétriques \leadsto Gob?
→ déf + structure des pol \pm -sym
Sz \rightarrow composantes homogènes, relations coeff racines
- Thm de structure
+ appl: Kronecker (FON alg 1)
- Sommes de Newton
+ appl: polygones régulières (FON alg 1)