

## 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

### I) Approximation par des polynômes

#### A) Approximation locale

Formules de TAYLOR-YOUNG, de TAYLOR-LAGRANGE, de TAYLOR avec reste intégrale.. Exemples et applications.

#### B) Approximation dans l'espace des fonctions continues

Définition de  $\mathcal{C}(K)$ ,  $(K, d)$  compact. Théorème de DINI. DEV 1 : STONE-WEIERSTRASS. Applications, cas des fonctions à valeurs complexes. Théorèmes adaptés aux fonctions à valeurs complexes. Applications.

#### C) Approximation dans $L^2$

Fonction poids  $\rho$ , espace  $L^2(I, \rho)$ . Existence d'une suite de polynômes orthogonaux. Exemples. Théorème d'existence d'une base hilbertienne. Application à  $L^2(\mathbb{R})$ .

### II) Approximation trigonométrique

#### A) Fonctions $2\pi$ -périodiques, convolution

Coefficients de FOURIER. Espace  $L^p_{2\pi}$ , produit de convolution, propriétés des coefficients de FOURIER. Définition de la série d'ordre  $N$  de FOURIER.

#### B) Exemples de noyaux trigonométriques

Noyau de DIRICHLET, propriétés. Noyau de FEJÉR, propriétés.

#### C) Application

Continuité de la translation dans  $L^p$ .. DEV 2 : FEJÉR. Applications.

### III) Régularisation sur $\mathbb{R}^d$ , distributions

Théorème de YOUNG, l'algèbre  $L^1$ , approximation de l'unité. Convergence de la convolée dans  $L^p$ . Applications à la transformée de FOURIER, densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Convergence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Définition d'une distribution sur un ouvert, dérivation, convergence au sens des distributions, exemples.

ANNEXE : Sinus et ses DL, polynômes de LEGENDRE et HERMITE, noyaux de FEJER, fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

- GOURDON
- HIRSH-LACOMBE
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- ZULLY-QUEFFÉLEC