

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières.

Exemples et applications.

I) Approximation par des polynômes

A) Approximation locale

Formules de TAYLOR-YOUNG, de TAYLOR-LAGRANGE, de TAYLOR avec reste intégrale.. Exemples et applications.

B) Approximation dans l'espace des fonctions continues

Définition de $\mathcal{C}(K)$, (K, d) compact. Théorème de DINI. DEV 1 : STONE-WEIERSTRASS. Applications, cas des fonctions à valeurs complexes. Théorèmes adaptés aux fonctions à valeurs complexes. Applications.

C) Approximation dans L^2

Fonction poids ρ , espace $L^2(I, \rho)$. Existence d'une suite de polynômes orthogonaux. Exemples. Théorème d'existence d'une base hilbertienne. Application à $L^2(\mathbb{R})$.

II) Approximation trigonométrique

A) Fonctions 2π -périodiques, convolution

Coefficients de FOURIER. Espace $L^p_{2\pi}$, produit de convolution, propriétés des coefficients de FOURIER. Définition de la série d'ordre N de FOURIER.

B) Exemples de noyaux trigonométriques

Noyau de DIRICHLET, propriétés. Noyau de FEJÉR, propriétés.

C) Application

Continuité de la translation dans L^p .. DEV 2 : FEJÉR. Applications.

III) Régularisation sur \mathbb{R}^d , distributions

Théorème de YOUNG, l'algèbre L^1 , approximation de l'unité. Convergence de la convolée dans L^p . Applications à la transformée de FOURIER, densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Définition d'une distribution sur un ouvert, dérivation, convergence au sens des distributions, exemples.

ANNEXE : Sinus et ses DL, polynômes de LEGENDRE et HERMITE, noyaux de FEJER, fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

- GOURDON
- HIRSH-LACOMBE
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- ZULLY-QUEFFÉLEC