

## 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Cadre :  $(E, d)$  un espace métrique.

### I) Généralités

A) Définitions, exemples

Suite de CAUCHY, espace complet, exemple et contre-exemple.

B) Propriétés des espaces complets

Complet  $\Rightarrow$  Fermé, produit d'espaces métriques, fermés emboîtés, application. Prolongement d'une application uniformément continue sur un espace complet, complété d'un espace métrique.

### II) Théorèmes de point fixe

Théorème du point fixe, contres-exemples, corollaire avec les itérées.

Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, exemples Théorème du point fixe à paramètre.

### III) Exemples d'espace complets

A) Espaces de Lebesgue

Définition de  $\mathcal{L}^p$ , inégalités de HÖLDER et MINKOWSKI, passage au quotient  $L^p$ .

DEV 1 : RIESZ-FISCHER.

DEV 2 : HARDY.

Cas des mesures finis : lemme de GROTHENDIECK

B) Espace de HILBERT

Définition, exemple de  $L^2$ . Projection sur un convexe fermé.

Cas d'un sous-espace vectoriel fermé. Linéarité de la projection. Théorème de représentation de RIESZ-FRÉCHET.

### IV) Espaces de baire

A) Théorème de BAIRE

Définition, théorème de BAIRE. Équivalence.

B) Applications

Espaces de BANACH  $\Rightarrow$  Dimension finie ou infinie non dénombrable. BANACH-STEINHAUS, application. Application ouverte, BANACH.

ANNEXE : Projection sur un convexe fermé.

Références :

- GOURDON
- BERTHELIN
- GARET-KURTZMANN
- BERNIS
- BECK-MALICK-PEYRÉ