201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

I) Espace des fonctions continues

A) Espace de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Définition, image d'un compact par une application continue. Espace $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un BANACH.

B) Espace $\mathcal{C}(K)$

Définition, propriétés. Théorème de HEINE. **DEV** 1 : STONE-WEIERSTRASS. Applications. Cas des fonctions à valeurs complexes. Applications. Théorème d'ASCOLI et applications.

II) Espace $\mathcal{L}(E,F)$

A) Application linéaire continue

Caractérisation d'une application linéaire continue. Application, l'algèbre normée $(\mathcal{L}_c(E), +, ., \circ)$.

B) La complétude dans $\mathcal{L}(E,F)$

$(F$ complet$) \Rightarrow (\mathcal{L}(E,F)$ complet$)$. Application à l'ouvert $GL_c(E)$ lorsque E est un BANACH. Théorème de BAIRE. Application au théorème de BANACH-STEINHAUS. Application : Série de FOURIER des applications continues. Théorème de l'application ouverte, du graphe fermé.

III) Espace L^p

A) Résultats généraux

Définitions, inégalités de YOUNG, de HÖLDER et de MINKOWSKI. Théorème de RIESZ-FISHER.

B) Applications

Cas de la mesure finie. **DEV** 2 : LEMME DE GROTHENDIECK. Résultat "vitrine" de l'analyse. Inégalité de HARDY

IV) Espace de HILBERT

Définition, exemple fondamental de ℓ^2. Théorèmes de projection et de représentation de RIESZ. Applications.

ANNEXE : Contre-exemple de complétude de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}, ||.||_1)$, projection sur un convexe fermé

Références :

- GOURDON
- HIRSH-LACOMBE
- ZULLY-QUEFFÉLEC
- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ