

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie.  
Orthogonalité, Isotropie. Applications.

**Cadre :**  $K$  un corps de caractéristique  $\neq 2$ ,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel.

### I) Généralités

#### A) Définitions

Définitions : forme bilinéaire symétrique, exemple, l'ensemble  $\mathcal{B}(E \times E, K)$ . Forme quadratique, forme polaire associée.

#### B) Représentation matricielle

Définition, exemple, matrice de passage. Classe congruence dans  $S_n(K)$ .

#### C) Représentation polynomiale

Polynôme homogène, polynôme représentant dans une base. Exemples.

### II) Orthogonalité, isotropie

$q$  une forme quadratique sur  $E$  de forme polaire  $\phi$ .

#### A) Cône isotrope, noyau de $\phi$

Définition, vecteur isotrope, exemple. Noyau de  $q$ . définie  $\Rightarrow$  non dégénérée. Réciproque fautive. Base  $q$ -orthogonale, théorème d'existence. Théorème spectral. Orthogonalité selon  $q$ . Exemples. Propriétés.

#### B) Algorithme de GAUSS

Expression en somme de formes linéaires au carré, algorithme de GAUSS, exemples.

### III) Classification des formes quadratiques

Définition de rang, exemples. Formes quadratiques équivalentes. Équivalence  $\Rightarrow$  même rang. Réciproque fautive. Équivalence sur un corps algébriquement clos, théorème de SYLVESTER, puis sur  $\mathbb{F}_q$ . Exemples.

### IV) Applications

#### A) Nombres de racines d'un polynôme réel

Mise en contexte. DEV 1 : FORME DE HANKEL.

#### B) Carrés de $\mathbb{F}_q$ .

Définition d'un carré, exemple, caractérisation d'un carré. Application à -1 et aux nombres premiers. Symbole de LE-GENDRE, exemple. DEV 2 : LOI DE RÉCIPROCITÉ QUADRATIQUE.

### Références :

- SEGUINS-PAZZIS
- GOURDON
- GRIFONE
- CALDERO
- PERRIN