161 : Distance dans un espace affine euclidien. Isométries.

Cadre : $(E, \mathcal{E})$ un espace affine.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définitions d'un espace affine euclidien, distance entre deux points de $\mathcal{E}$. Distance à un sous-espace affine, projeté orthogonal.

B) Matrice et déterminant de GRAM

Matrice et déterminant de GRAM, caractérisation de son inversibilité. Distance à un sous-espace vectoriel. Exemple. Application à l'inégalité d'HADAMARD. Expression du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie à l'aide de la matrice de GRAM.

II) Isométries d'un espace affine euclidien

A) Forme canonique

Théorème de forme canonique des isométries affines.

B) Isométries affines conservant une partie

Définition d'une isométrie fixant une partie, déplacement et anti-déplacements fixant une partie. Exemple du cube. Théorème liant $Is(\mathcal{P})$ et $\mathfrak{S}(\mathcal{P})$. Exemple du groupe diédral.

III) Structure des isométries

A) Le groupe orthogonal

Définitions de réflexion et retournement orthogonal. Théorème de CARTAN-DIEUDONNÉ. **DEV** 1 : $SO_n(\mathbb{R})$ ENGENDRÉ PAR LES RENVERSEMENTS + $SO_3(\mathbb{R})$ EST SIMPLE. Théorème de classifications de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$, conséquence et exemple. Définition d'un endomorphisme normal, exemples des endomorphismes orthogonaux et des similitudes. **DEV** 2 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX. Application à la réduction des endomorphismes orthogonaux, cas général.

B) Isométries du plan

Décomposition d'une isométrie en produit de réflexions. Application à la classification des isométries du plan affine euclidien.

ANNEXES : Représentations d'une translation, d'une symétrie glissée etc.. Illustrations d'une rotation et symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^2$, puis de $O(\mathbb{R}^3)$. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel. Tableau récapitulatif des isométries du plan affine euclidien.

Références :

- ROMBALDI
- AUDIN
- CALDERO
- GRIFONE