

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définitions, matrice positive, valeurs propres d'une telle matrice.

B) Endomorphisme adjoint

Endomorphisme adjoint, matrice relativement à une base orthonormée, exemple. Propriétés de l'adjoint. Endomorphisme symétrique, exemples.

II) Réduction

A) Théorème spectral

Théorème spectral, caractérisation des produits scalaires via les formes hermitiennes.

B) Endomorphisme normal

Définition, matrice normale, exemples. DEV 1 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX. Applications.

C) Classification des formes hermitiennes

Forme hermitienne non dégénérée, exemple. Orthogonalité relativement à une forme hermitienne. Base orthogonale, théorème d'existence. Théorème de SYLVESTER. Signature. Réduction simultanée.

III) Topologie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

Propriétés de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, décomposition polaire, application. Exponentielle d'une matrice, exemple. Homéomorphismes, applications.

IV) Applications

A) Calcul différentiel

Matrice hessienne, extremum local, condition suffisance d'existence. Cas $n = 2$. DEV 2 : LEMME DE MORSE. Application.

B) Décomposition matricielle

Factorisation LU , décomposition de CHOLESKY. Exemples.

Références :

- GRIFFONE
- ROMBALDI
- ALLAIRE-KABER