

140) Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.


I/ Corps des fractions rationnelles (Lelong-Ferrand Annuaire)

- Corps des fractions : déf, morphisme injectif $K[X]$ forme réduite (forme irréductible, ex). (Tourel) degré, prop du degré
- Pôles : déf, ensemble fini → ensemble de déf, fraction rationnelle, $F_1(x) = F_2(x) \Leftrightarrow F_1 = F_2$ si K est infini → multiplicateur d'un pôle
- Dérivation (Tourel) : cas d'un corps de caract nulle (LFA plus loin) $\forall f \in K$ pas de fraction rationnelle ty $f' = \frac{1}{x}$ (dérivée logarithmique + thm de Gauss-Lucas)
- Corps $K(X)$ → n'est pas algébriquement clos (Tourel) Si α est transcendant sur K , $K(X) \neq K(\alpha)$ Automorphismes de $K(X)$.

II/ Décomposition en éléments simples

- Théorie (Lel-F Ar) : avec le lemme préliminaire → (Tourel) expression en termes de base, → cas où K est algébriquement clos.
- Calcul pratique → pôle simple : $\rightarrow \frac{p(a)}{(x-a)^1(a)}$ multiplication par $x-a$ → pôle multiple → en cas 0, Taylor \hookrightarrow sinon, méthode des puissances croissantes. cas où on a affaire à une dérivée log. → ex de calcul pratique

III/ Applications

- Calcul de primitives → déf du résidu (LFA) fraction rationnelle admettant une primitive rationnelle → calcul de R/S lorsqu'on a un pôle $\neq 0$. → résidu à l'infini, formule des résidus (Tourel)
- Exemples de paramétrages de courbes → coniques: on fixe un point et on paramètre l'ensemble des droites passant par ce point, qui rencontrent la conique une fois. → folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3xy$ 

Fractions rationnelles et séries formelles

- $\frac{1}{(1-x)^n}$ → dér en série formelle
- Toute fraction rationnelle de $K(X)_0$ admet un dér. en SF
- $K((X))$ et $\mathbb{C}((X))_0$
- Polynômes cyclotomiques

Inversion de Möbius (→ en exa dans Arn-Berlin)

ϕ_n a des coeff dans $\{0, 1, -1\}$.
premier impair distinct