

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Applications.

Cadre : \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I) L'algèbre $K[u]$

A) Définitions, propriétés

Définition de $P(u)$. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$, définition analogue pour une matrice. Spectre de $P(u)$ en fonction de u dans le cas algébriquement clos, contre-exemple.

B) Polynôme caractéristique

Morphisme d'algèbres $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[u]$, existence d'un polynôme minimal. Dimension de $\mathbb{K}[u]$, caractérisation du corps $\mathbb{K}[u]$, exemple d'un projecteur. Théorème de CAYLEY-HAMILTON, applications.

C) Sous-espaces stables

Stabilité des noyaux et images de deux endomorphismes commutant, application. Lemme des noyaux, application et exemple.

II) Application à la réduction

A) Décomposition de DUNFORD

DEV 1 : DÉCOMPOSITION DE DUNFORD. Exemple et contre-exemple.

B) Semi-simplicité

Définition, exemple, cas de \mathbb{K} algébriquement clos. **DEV 2 :**

ENDOMORPHISME SEMI-SIMPLE. Application à DUNFORD généralisé.

C) Endomorphisme normal

E euclidien.

Définition, exemples. Cas matriciel, réduction des endomorphismes normaux. Applications.

III) Application au calcul matriciel

A) Calculs d'inverses et de puissances

Polynôme annulateur de coefficient constant non nul, application à l'inversibilité et le spectre d'un tel endomorphisme. Calcul de puissance d'un endomorphisme.

B) Exponentielle matricielle

Définition, propriété polynomiale de e^u , $u \in \mathcal{L}(E)$. Décomposition de DUNFORD de e^u , application à la diagonalisabilité de u . Équation différentielle homogène, polynôme caractéristique et résolution d'une telle équation. Exemple.

C) Géométrie

Déterminant circulant. Application à la suite de polygones.

ANNEXES : Polynômes minimal et caractéristique d'une symétrie, projection sur un sous-espace F , d'un nilpotent, d'une homothétie. Exemples de polygones.

Références :

- ROMBALDI
- BERTHELIN