

152 : Déterminants. Exemples et applications.

Cadre : \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définition d'une forme multilinéaire alternée sur E^p , caractérisation. L'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$. Déterminant d'un n -uplet relativement à une base. Relation de CHASLES. Caractérisation des familles liées / libres de E . Déterminant d'un endomorphisme de E . Propriétés classiques du déterminant.

B) Méthodes de calcul d'un déterminant

Propriétés classiques sur le déterminant d'une matrice. Matrice triangulaire, développements selon une ligne et une colonne. Formule de la comatrice.

C) Interprétation géométrique

Lien entre le déterminant de deux vecteurs dans \mathbb{R}^2 et l'aire du parallélogramme engendré par ces deux derniers. Généralisation au volume dans \mathbb{R}^n .

II) Déterminants classiques

A) Déterminant de VANDERMONDE

Déterminant de Vandermonde, calcul de ce dernier. Applications.

B) Déterminant de GRAM

Définition d'une matrice de GRAM, de son déterminant. Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie, exemple.

C) Déterminant circulant

Matrice circulante. **DEV 1** : SUITE DE POLYGONES. Application au calcul de déterminant.

III) Applications

A) Valeurs propres d'un endomorphisme

Valeur propre, caractérisation via le polynôme caractéristique (prendre le soin d'étendre le déterminant à l'anneau $\mathbb{K}[X]$ qui n'est pas un corps). **DEV 2** : ÉTUDE DE $GL_n(\mathbb{C})$. Application.

B) Changement de variables

Déterminant jacobien. Théorème de changement de variable. Exemples. Théorème d'inversion local, application.

C) Forme quadratique

Formes quadratiques équivalentes. Discriminant. Étude sur \mathbb{C} , \mathbb{R} ou \mathbb{Q} . Cas des corps finis. Exemples.

ANNEXES : Distance à un sous espace de dimension finie. Suite de polygones. Inversion locale.

Références :

- ROMBALDI
- GRIFFONE
- GOURDON
- GARET-KURTZMANN
- ROUVIÈRE