

## 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

**Cadre** :  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $Fr(A)$  son corps de fractions,  $K$  un corps,  $A^\times$  les inversibles de  $A$ .

### I) L'anneau $K[X]$

Définition d'un irréductible, inversibles de  $A[X]$ , exemple. Contenu d'un polynôme, polynôme primitif. Caractérisation des irréductibles sur  $A[X]$ . Exemple. Irréductibles de  $K[X]$ , caractérisation de la primalité de  $A[X]$ . Contre-exemple de  $\mathbb{Z}[X]$ . Caractérisation d'un quotient par un polynôme irréductible.

### II) Critères d'irréductibilité

Critère EISENSTEIN, exemples. Théorème de réduction. Contre-exemple dans  $A$ . Applications.

### III) Extension de corps, polynôme

#### A) Définitions, propriétés

Définition d'une extension, de degré, exemples. Théorème de la base télescopique, application. Définition d'un élément algébrique, transcendant, exemple. Polynôme minimal, caractérisation. Exemple du sous-corps des algébriques sur un corps.

#### B) Corps de rupture

Définition, exemple. Théorème d'existence et d'unicité, application à l'irréductibilité (critères dans les extensions), exemples.

#### C) Corps de décomposition

Définition, théorème d'existence et d'unicité, exemples.

**DEV 1** : GALOIS INVERSE. Exemples.

### IV) Polynômes irréductibles sur les corps finis

$q = p^n$ ,  $p$  premier,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### A) L'ensemble des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$

Définitions de  $\mathcal{P}_p(i)$  et  $I_p(i)$ . **DEV 2** : POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES SUR  $\mathbb{F}_p$ . Exemples.

#### B) Factorisation de polynômes

Théorème de BERLEKAMP, applications.

### V) Polynômes cyclotomiques

Sous-groupes de l'unité, définition du  $n$ -ième polynôme cyclotomique  $\Phi_{n,k}$ , exemples. Degré de  $\Phi_{n,k}$ , relations avec  $X^n - 1$ , irréductibilité de  $\Phi_{n,k} \in \mathbb{Z}[X]$ , application au degré de l'extension de  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi)$ .

ANNEXE : Algorithme de BERLEKAMP.

Références :

- PERRIN
- TAUVEL
- BECK-MALICK-PEYRÉ