

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Cadre : \mathbb{K} un corps.

I) Généralités sur les extensions de corps

Définition d'une extension, du degré, exemples. Théorème de la base télescopique. Application, exemple. Éléments algébrique et transcendant. Polynôme minimal, caractérisation. Sous-corps des éléments algébriques. Extension algébrique, exemple des extension finie, réciproque fausse.

II) Extension de corps, polynôme

A) Corps de rupture

Définition, exemple, théorème d'existence et d'unicité. Corps isomorphes n'impliquent pas corps égaux.

B) Corps de décomposition

Définition, exemple. Théorème d'existence et d'unicité.

C) Clôture algébrique

Définition d'un corps algébriquement clos, exemple de \mathbb{C} et de $\overline{\mathbb{Q}}$. Théorème de STEINITZ.

III) Application à l'irréductibilité des polynômes

A) Critère d'irréductibilité

Irréductibilité dans les extensions, applications.

B) Polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_p .

Définitions de $\mathcal{P}_p(i)$ et $I_p(i)$. Corps finis via les polynômes irréductibles. DEV 1 : POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES SUR \mathbb{F}_p .

IV) Cyclotomie

Sous-groupes des racines n -ièmes de l'unité et primitives. n -ième polynôme cyclotomique, exemple. Degré de ce polynôme et égalité. Irréductibilité de $\Phi_{n,k} \in \mathbb{Z}[X]$. Application au degré de l'extension $\mathbb{Q}(\xi)$.

V) Groupe de GALOIS

k -automorphisme, groupe de GALOIS, exemples. Lemme de DEDEKIND. Action de $Gal(D/k)$ sur l'ensemble des racines. Parties génératrice de \mathfrak{S}_p . Critère d'EISENSTEIN. DEV 2 : GALOIS INVERSE.

Références :

- TAUVEL
- PERRIN