

# 121 : Nombres premiers. Applications.

## I) Généralités

### A) Définitions, propriétés

Définition, exemples. Nombre infini de nombres premiers. Théorème fondamental de l'arithmétique, exemple. PGCD, PPCM, nombres premiers dans leur ensemble, deux à deux. Lien entre les deux. Théorème de BEZOUT, de GAUSS, exemples.

### B) Tests de primalité

Caractérisation d'un premier avec l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Théorème de FERMAT, de WILSON, applications. Nombres de MERSENNE, de FERMAT.

## II) Application aux polynômes

Critère d'EISENSTEIN, applications. Théorème de réduction modulo  $p$ . Faux dans  $A[X]$ , réciproque fausse. Polynôme cyclotomique, irréductibilité, exemples.

## III) Application aux groupes

### A) Les $p$ -SYLOW

Définitions :  $p$ -groupe,  $p$ -SYLOW. Exemple de  $GL_n(\mathbb{F}_p)$ . Les théorèmes de SYLOW. Application aux groupes d'ordre  $pq$ . Exemples.

### B) Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Caractérisation des générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Structure de  $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Inversibles de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . DEV 2 : CYCLICITÉ DE  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ . Application.

## IV) Application aux corps finis

Caractéristique d'un corps, structure des corps finis.  $(\mathbb{F}_q)^*$  cyclique. Carrés de  $(\mathbb{F}_q)^*$ , application. Construction d'un corps fini, exemples. Symbole de LEGENDRE DEV 2 : LOI DE RÉCIPROCITÉ QUADRATIQUE. Application.

### Références :

- GOURDON
- PERRIN
- CALDERO