

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous groupe de $GL(E)$.

Applications.

Cadre : E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

I) Généralités

Définitions, exemples. produit semi-direct. **Caractérisation des éléments de $GL(E)$.**

II) Éléments essentiels de $GL(E)$

A) Les homothéties

Définition, exemple, caractérisation des homothéties.

B) Les dilatations

Caractérisation des dilatations, exemple. Conjugaison.

C) Les transvections

Caractérisation des transvections, exemple. Conjugaison dans $GL(E)$ et $SL(E)$, exemple.

III) Étude de $GL(E)$

A) Générateurs, algorithme du pivot de GAUSS

Engendrement de $GL(E)$ et $SL(E)$. Application aux calculs de $D(GL(E))$ et $D(SL(E))$. **Matrice de rang r . Ensemble des matrices échelonnées réduites en lignes. Décomposition de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sous l'action de $GL_m(\mathbb{K})$.**

B) Centres et commutateurs

Centres de $GL(E)$ et $SL(E)$. Cas où \mathbb{K} est algébriquement clos. Opération de $PGL(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$.

C) Cas des corps finis

Cardinaux des différents groupes, applications aux isomorphismes exceptionnels. **DEV 1 : DÉNOMBREMENT DE $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$.**

IV) Le groupe orthogonal euclidien

Définition, groupe $O(q)$ et $O^+(q)$, exemple. Centres des deux groupes, suite exacte scindée. Définitions de réflexion et renversement orthogonale, exemples. Engendrement de $O(q)$ et $O^+(q)$ par ces derniers. Application à la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. Réduction des isométries.

V) Topologie

$GL(E)$ ouvert et dense dans $\mathcal{L}(E)$, application. $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs, composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$. Compacité de $O(E)$. **Décomposition polaire, application. DEV 2 : MORPHISMES CONTINUS DE \mathcal{S}^1 DANS $GL_n(\mathbb{R})$.**

ANNEXES : Représentations d'une dilatation, d'une transvection, d'une réflexion orthogonale et d'un renversement orthogonale dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$. Différentes actions de $GL_n(\mathbb{K})$.

Références :

- PERRIN
- ROMBALDI
- CALDERO - TOME 2