

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définition, exemple de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. r -cycle, transposition, exemples. Centre de $S(E)$. Cas d'ensembles en bijection. Exemple. Cardinal de $S(E)$. Exemple.

B) Actions de groupes, décomposition en cycles disjoints

Support d'une permutation, action d'une permutation, orbite, exemple. Décomposition en cycle disjoint (unique), en transpositions (plus unique)

II) Le groupe alterné

Morphisme signature, valeurs, applications à des r -cycles, exemples. Groupe alterné, ordre. **DEV 1** : SIMPLICITÉ DE \mathfrak{A}_n . Sous-groupes distingués de $S(E)$. Application : morphisme surjectif de $S(E)$ vers $A(E)$.

III) Applications

A) Polynômes symétriques

Définition, exemples, polynôme élémentaire. Décomposition en polynômes élémentaires, exemples.

B) Matrices de permutation

Théorème de CAYLEY, matrice de permutation, lien entre signature d'une permutation et le déterminant de sa matrice de permutation. Identification d'un groupe fini à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$, SYLOW, exemple.

C) Dérangements d'un ensemble fini

Définition, exemple, formule d'inversion de PASCAL, dénombrements du nombre de dérangements, du nombre de permutations à r points fixes, application.

IV) Automorphismes de $S(E)$

Définition, isomorphisme, cas abélien. **DEV 2** : AUTOMORPHISMES DE \mathfrak{S}_n . Cas $n = 6$.

Références :

- ROMBALDI
- PERRIN