

104 : Groupes finis. Exemples et applications

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définitions, exemples, LAGRANGE, sous-groupe engendré, sous-groupe distingué, exemples.

B) Actions de groupe

Définition, exemple (conjugaison). Orbite, stabilisateur, bijection. Équation aux classes, centre d'un p -groupe. Théorème de CAUCHY, exemple.

II) Groupes abéliens finis

A) Groupes cycliques

Groupe cyclique, exemple, structure des groupes cycliques (racines de l'unité). Exemple des groupes d'ordre premier, d'ordre pq commutatif, contre-exemple (\mathfrak{S}_3). Sous-groupe d'un groupe cyclique.

B) Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Caractérisation des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Fonction d'Euler. Structure de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Théorème chinois. Cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Application au groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

III) Groupes non abéliens finis

A) Groupes symétrique et alterné

Définition, cardinal de \mathfrak{S}_n . r -cycle, transposition. Générateurs de \mathfrak{S}_n . Centre de \mathfrak{S}_n . Signature, définition de \mathfrak{A}_n . Cardinal de \mathfrak{A}_n . DEV 1 : SIMPLICITÉ DE \mathfrak{A}_n , POUR $n \geq 5$.

Automorphisme intérieur, isomorphisme. DEV 2 : AUTOMORPHISMES DE \mathfrak{S}_n . Application.

B) Le groupe diédral

Définition, caractérisation d'un groupe diédral. Produit semi-direct, cas $n = 3$, centre du groupe D_n . Groupe des isométries sur le cube.

ANNEXE : Représentation du groupe diédral.

Références :

- GOURDON
- ROMBALDI
- PERRIN