

*103 : Conjugaison dans un groupe.
Exemples de sous-groupes distingués
et de groupes quotients. Applications.*

Cadre : G un groupe.

I) Généralités

A) Sous-groupe distingué

Définitions, exemples

B) Ensemble quotient

Classe à gauche, partition, LAGRANGE, relation compatible, lien avec un sous-groupe distingué. Théorème de structure de groupe sur un ensemble quotient, théorème d'isomorphisme.

C) Action par conjugaison

Définition d'une action de groupe, bijection avec l'orbite, équation aux classes. Cas d'une opération par conjugaison. Application aux p -groupes.

II) Application à la simplicité des groupes

Définition d'un groupe simple.

A) Groupes symétrique et alterné

Parties génératrices de \mathfrak{S}_n , exemples. Signature, groupe alterné \mathfrak{A}_n . DEV 1 : SIMPLICITÉ DE \mathfrak{A}_n , POUR $n \geq 5$. Le cas \mathfrak{A}_4 , sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_n .

B) Groupes matriciels

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien sur un corps K .

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$, identification aux groupes de

matrices. Réflexion, transvection, conjugaison, exemple. Retournement, exemple, partie génératrice de $O(n)$. DEV 2 : $SO_n(\mathbb{R})$ ENGENDRÉ PAR LES RETOURNEMENTS + $SO_3(\mathbb{R})$ EST SIMPLE.

III) Application au dévissage de groupes

p -groupe de SYLOW, exemple. Théorèmes de SYLOW. Application. Produit semi-direct, caractérisation. Exemples et contre-exemples de produits semi-directs.

ANNEXE : Représentations d'une dilatation, d'une transvection, d'un retournement et renversement orthogonaux.

Références :

- PERRIN
- ROMBALDI
- CALDERO