

## 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

### I) Généralités

#### A) Autour de la fonction exponentielle

Définition des séries entières exponentielle, sinus et cosinus. Propriétés. Formule de MOIVRE et d'EULER. Applications à la linéarisation. Polynomes de CHEBYCHEV. Noyaux de DIRICHLET et FEJÉR.

#### B) Groupe des nombres complexes de module 1.

Définitions de  $\mathbb{U}$ , exemples. Argument d'un complexe non nul. Exemples. Propriétés et isomorphismes. Résolution de  $z^n = z_0$ . Propriétés. Racines primitives de l'unité. Indicatrice d'EULER, application.

### II) Angles orientés

Isomorphisme entre  $\mathbb{U}$  et  $SO(\mathbb{C})$ . Définitions d'angle orienté entre deux complexes non nuls puis entre 2 droites. Relation de CHASLES.

### III) Polynômes cyclotomiques

Définition, exemples, propriétés des polynômes cyclotomiques. Irréductibilité du polynôme sur  $\mathbb{Z}$ . Application au degré de l'extensions  $\mathbb{Q}(\zeta)$ . Théorème de WEDDERBURN.

### IV) Applications

#### A) Représentation linéaire

Définitions, propriétés. Lemme de SCHUR. Théorème de MASCHKE. DEV 1 : MORPHISMES DE  $(\mathcal{S}^1, \times)$  DANS  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ .

#### B) Spectres de matrices

Définition d'une valeur propre, exemple. Spectre d'un automorphisme orthogonal dans le cadre euclidien. DEV 2 : DÉTERMINANT CIRCULANT. Application à un calcul de déterminant.

ANNEXES : Racines  $n$ -ième de l'unité, angles orientés.

Références :

- RUDIN
- ARNAUDIÈS-FRAYSSÉ
- PERRIN
- ROMBALDI
- GOURDON