Théorème de WEIERSTRASS

ÉNONCÉ :
$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Théorèmes de Weierstrass : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : En définissant le module de continuité d'une fonction continue f :

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(u) - f(v)| \mid |u - v| \leq \delta\}$$

sur $[0,1]$, on a :

1. ω_f est une fonction croissante.
2. Pour $h_1, h_2 \in [0,1]$, $\omega_f(h_1 + h_2) \leq \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2)$.
3. Pour $h \in [0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda h \in [0,1]$, $\omega_f(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega_f(h)$.

Démonstration. 1. Pour $h_1, h_2 \in [0,1]$ tels que $h_1 \leq h_2$, alors on a l'inclusion ensembliste :

$$\{|f(u) - f(v)| \mid |u - v| \leq h_1\} \subset \{|f(u) - f(v)| \mid |u - v| \leq h_2\}$$

2. Soient $h_1, h_2, u, v \in [0,1]$ tels que $|u - v| \leq h_1 + h_2$. Il existe $w \in [\min(u,v), \max(u,v)]$ tel que $|u - w| \leq h_1$ et $|w - v| \leq h_2$.

On a donc :

$$|f(u) - f(v)| \leq \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2)$$

d'où le résultat par passage au sup sur le membre de gauche.

3. On a, par ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in [0,1]$ $\omega_f(nh) \leq n\omega_f(h)$.
Considérons $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda h \in [0,1]$. On a, par définition de la partie entière :

$$\begin{aligned}\omega_f(\lambda h) &\leq \omega_f((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h)\\ &\leq (\lambda + 1)\omega_f(h)\end{aligned}$$

□

Démonstration. Quitte à considérer la translation $t \mapsto ta + (1-t)b$ sur $[0,1]$, on peut se restreindre au cas de $\mathcal{C}([0,1], ||.||_\infty)$.
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. On considère $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi de BERNOULLI de paramètre x. le polynôme de BERNSTEIN d'indice n le polynôme défini par :

$$\forall x \in [0,1],\ B_n(f)(x) := \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right]\\ &\leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right] \quad \text{(lemme)}\\ &\leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right] + 1\right)\end{aligned}$$

Or on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_n}{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Var\left(\frac{S_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

L'inégalité étant valable pour tout $x \in [0,1]$, on a donc :

$$
\begin{aligned}
||f - B_n||_\infty &\leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\frac{1}{2\sqrt{n}} + 1\right) \\
&= \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

$\square$

Remarques :

- On utilise le fait que $\omega_f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$: ceci est justifié par l'uniforme continuité d'une fonction continue sur un compact (théorème de HEINE).
- On peut montrer qu'il s'agit de la meilleure majoration.
- On ne peut bien entendu pas étendre le résultat à $\mathbb{R}$ car la limite uniforme d'une suite de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme.
- On peut étendre ce résultat à toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ (K,d) un espace métrique compact (théorème de STONE-WEIERSTRASS).