Théorème de PALEY-WIENER

[ZUILY, p 123]

ÉNONCÉ :

Théorème :

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $supp(\varphi) \subset [-r, r]$. Alors il existe une fonction $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que :
$$\begin{cases} F_{|\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\varphi) \\ \forall N,\ \exists C_N,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |F(z)| \leq C_N(1+|z|)^{-N} e^{r|Im(z)|} \quad (*) \end{cases}$$
2. Réciproquement, si $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $(*)$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :
$$\begin{cases} supp(\varphi) \subset \{t \in \mathbb{R} \mid |t| < r\} \\ \mathcal{F}(\varphi) = F_{|\mathbb{R}} \end{cases}$$

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant $(*)$. L'intégrale :
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x+iy)} F(x+iy)dx$$
est indépendante de $y \in \mathbb{R}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Fixons $y \in \mathbb{R}$. On considère Γ_R le contour de $\mathbb{C}$ de sommets $(-R, 0), (R, 0), (R, y)$ et $(-R, y)$. Considérons la fonction $g_t(z) = e^{itz}F(z)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$. En vertu du théorème de CAUCHY, on a que $\int_{\Gamma_R} g_t(z)dz = 0$, *i.e.* :
$$\underbrace{\int_{-R}^{R} g_t(x)dx}_{:=I_1} + \underbrace{\int_0^y g_t(R+is)ids}_{:=I_2} + \underbrace{\int_R^{-R} g_t(x+iy)dx}_{:=I_3}$$
$$+ \underbrace{\int_y^0 g_t(-R+is)ids}_{:=I_4} = 0$$
Lorsque $R \to +\infty$, $|I_i| \to 0,\ i \in \{2, 4\}$. En effet, on peut écrire :
$$|g_t(R+is)| \leq C_1(1+R)^{-1}e^{s(r-t)}$$
d'où $|I_2| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la convergence est uniforme en $s \in [0, y]$. Le raisonnement est le même pour I_4. Les intégrales généralisées lorsque $R \to +\infty$ de I_1 et I_4 étant bien définies, on en déduit le résultat. □

Démonstration. (théorème) :

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $F(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-itz}\varphi(t)dt$ et notons $f(t, z) := e^{-itz}\varphi(t)$. On a trivialement $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $R > 0$ tel que $|z| \leq R$ pour tout $z \in K$. Étant donné que $|t| \leq r$ sur le support de φ, on a :
$$\begin{aligned} |f(t,z)| &\leq e^{t|Im(z)|}|\varphi(t)| \\ &\leq e^{rR}|\varphi(t)| \end{aligned}$$
Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral (puisque $t \mapsto e^{rR}|\varphi(t)|$ est intégrable), on en déduit que F est holomorphe pour $|z| < R$ sur tout compact de $\mathbb{C}$, donc sur $\mathbb{C}$. Par ailleurs, on a évidemment que $F_{|\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\varphi)$. Reste à prouver $(*)$. Pour

tout $N \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} |z|^N |F(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} z^N e^{-itz} \varphi(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-i)^N} \frac{d^N}{dt^N} (e^{-itz}) \varphi(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} \frac{d^N \varphi}{dt^N}(t) dt \right| \\ &\leq e^{r|Im(z)|} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^N \varphi}{dt^N}(t) \right| dt}_{:= \tilde{C}_N < +\infty} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} (1+|z|)^N |F(z)| &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} |z|^k |F(z)| \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \tilde{C}_k \right)}_{:= C_N} e^{r|Im(z)|} \end{aligned}$$

Donc F vérifie bien $(*)$, d'où le premier point.

2. Réciproquement, considérons, pour $t \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F(x) dx$. Puisque $F_{|\mathbb{R}}$ vérifie $(*)$, elle est dans L^1 et donc φ est bien définie. De plus, φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivation sous le signe intégral. Pour $t \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda > 0$, on pose $y = \lambda \frac{|t|}{t}$, de sorte que $ty = \lambda |t|$ et $|y| = \lambda$. Par $(*)$, on a avec $N = 2$, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |e^{it(x+iy)} F(x+iy)| &\leq e^{-ty} C_2 (1+|x|)^{-2} e^{r|y|} \\ &\leq e^{\lambda(r-|t|)} C_2 (1+|x|)^{-2} \end{aligned}$$

d'où $|\varphi(t)| \leq C_2 e^{\lambda(r-|t|)} \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{-2} dx$. Mais lorsque $\lambda \to +\infty$, on obtient $\varphi(t) = 0$ si $t \notin [-r, r]$, donc $supp(\varphi) \subset [-r, r]$. Ainsi on en déduit que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et par la formule d'inversion de FOURIER, on a que $\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(F_\sigma)) = F_{|\mathbb{R}}$.

□

Remarques :

- Il existe une autre version sur les distributions.
- Le résultat est généralisable à une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. Rappel pour le cas d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$: un point $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, où $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$. Ainsi, une fonction $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ si l'application

$$\tilde{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) & \longrightarrow & F(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \end{array}$$

  est de classe $\mathcal{C}^1$ et si pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\frac{\partial F}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + i \frac{\partial F}{\partial y_j} \right) = 0$ en tout point de $\mathbb{C}^n$.
- Une application simple de ce théorème : il n'existe pas d'élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ tel que sa transformée de FOURIER soit dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$.