HOUSEHOLDER-GELFAND

ÉNONCÉS :

Théorème (Householder) :
Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes induites à une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \rho(A) = \inf_{|||.|||\in\mathcal{N}} |||A|||$$

Théorème (Gelfand) :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \rho(A) = \lim_{k\to+\infty} |||A^k|||^{\frac{1}{k}}$$

où $|||.|||$ est une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $P_\epsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P_\epsilon^{-1} T_\epsilon P^\epsilon$, où $T_\epsilon = ((t_{i,j}^\epsilon)_{1\le i,j\le n})$ est triangulaire supérieure telle que

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}| < \epsilon$$

Démonstration. Comme la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, on dispose d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$, où $T = ((t_{i,j})_{1\le i,j\le n})$ est triangulaire supérieure. Pour $\delta > 0$, posons $D_\delta = diag(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$. Alors on a :

$$T_\delta := D_\delta^{-1} T D_\delta = D_{\frac{1}{\delta}} T D_\delta = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \delta t_{1,2} & \dots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

En notant $T_\delta = ((t_{i,j}^\delta))$, on a, lorsque $\delta \longrightarrow 0$, $t_{i,j}^\delta \longrightarrow 0$ pour $j > i$, $i, j \in \{1, \dots n\}$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que $\max_{1\le i\le n} \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}^\delta| < \epsilon$ et on a bien que A est semblable à T^δ. □

Démonstration. (Householder) : Soit $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre unitaire de A, alors

$$\rho(A)||x|| = ||Ax|| \le |||A|||$$

d'où

$$\rho(A) \le \inf_{|||.|||\in\mathcal{N}} |||A|||$$

Par le lemme, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $P_\epsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P_\epsilon^{-1} T_\epsilon P^\epsilon$, où $T_\epsilon = ((t_{i,j}^\epsilon)_{1\le i,j\le n})$ est triangulaire supérieure telle que

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}| < \epsilon$$

Considérons la norme vectorielle $x \longrightarrow ||x||_{P_\epsilon} = ||P_\epsilon x||_\infty$ de norme induite $|||A|||_{P_\epsilon} = |||P_\epsilon^{-1} A P_\epsilon|||_\infty$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}|||A|||_{P_\epsilon} &= |||P_\epsilon^{-1}AP_\epsilon|||_\infty \\ &= |||T_\epsilon|||_\infty \\ &= \max_{1\leq i\leq n}\left(|t_{n,n}|, |t_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^{n}|t_{i,j}^\epsilon|\right) \\ &\leq \rho(A) + \epsilon\end{aligned}$$

d'où l'égalité :

$$\rho(A) = \inf_{|||\cdot|||\in\mathcal{N}}|||A|||$$

□

Démonstration. (*Gelfand*) : On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}|||A^k|||_\infty &= |||P_\epsilon T_\epsilon^k P_\epsilon^{-1}|||_\infty \\ &\leq \gamma_\epsilon |||A^k|||_\infty \\ &\leq \gamma_\epsilon(\rho(A) + \epsilon)^k\end{aligned}$$

où $\gamma_\epsilon = |||P_\epsilon|||_\infty |||P_\epsilon^{-1}|||_\infty$. D'où $|||A^k|||_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \gamma_\epsilon^{\frac{1}{k}}(\rho(A)+\epsilon)$. Or lorsque $k \longrightarrow +\infty$, $\gamma_\epsilon^{\frac{1}{k}} \longrightarrow 1$, d'où l'existence d'un $k_0 \geq 0$ tel que $\gamma_\epsilon^{\frac{1}{k}} < 1+\epsilon$ pour $k \geq k_0$.
Ainsi, pour k suffisamment grand, on a l'encadrement :

$$\rho(A) \leq |||A^k|||_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \epsilon(1 + \rho(A) + \epsilon)$$

d'où

$$\rho(A) = \lim_{k\to+\infty}|||A^k|||^{\frac{1}{k}}$$

.
Les normes étant équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha^{\frac{1}{k}}|||A^k|||_\infty^{\frac{1}{k}} \leq |||A^k|||^{\frac{1}{k}} \leq \beta^{\frac{1}{k}}|||A^k|||_\infty^{\frac{1}{k}}$$

avec $\lim_{k\to+\infty}\alpha^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty}\beta^{\frac{1}{k}} = 1$ et $\lim_{k\to+\infty}|||A^k|||^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ par ce qui précède. Par le théorème d'encadrement on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty}((|||A^k|||^{\frac{1}{k}}) = \rho(A)$$

□