Théorèmes d'HAHN-BANACH (géométrique)

[BREZIS, p 1]

ÉNONCÉ :

Théorèmes : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. (HAHN-BANACH *sens large*) : Supposons E normé. Soient $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints, avec A ouvert.
   Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens large.
2. (HAHN-BANACH *sens strict*) Soient $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints, avec A compact et B fermé.
   Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens strict.

DÉVELOPPEMENT :

Démonstration. (*géométrique*) :

LEMME : Soit $C \subset E$ un convexe ouvert contenant 0. On définit la jauge de C par : $\begin{array}{rccl} p: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in C\} \end{array}$
Alors p est une sous-norme vérifiant :

- $\exists M > 0;\ \forall x \in E,\ 0 \leq p(x) \leq M||x||$
- $C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$

Démonstration. • Soit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset C$, il est clair que

$$\forall x \in E, \quad p(x) \leq \frac{1}{r}||x||$$

d'où le premier point.

- Soit $x \in C$, alors pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $(1+\epsilon)x \in C$. Ainsi, $p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$. Inversement, si $p(x) < 1$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\alpha^{-1}x \in C$ et donc $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$.

Vérifions qu'il s'agit bien d'une sous-norme. Soient $x \in E$, $\lambda, \alpha > 0$ tels que $\alpha^{-1}x \in C$. De $\alpha^{-1}\lambda^{-1}(\lambda x) = \alpha^{-1}x \in C$, on en tire $p(\lambda x) \leq \alpha\lambda$. Par passage à la borne inférieure sur α on en déduit que $p(\lambda x) \leq \lambda p(x)$ $(*)$.
Réciproquement, pour $x \in E$, on a :

$$p(x) = p\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x\right) \underbrace{\leq}_{(*)} \frac{1}{\lambda}p(\lambda x)$$

Soient $x, y \in E$ et soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha^{-1}x \in C$ et $\beta^{-1}y \in C$. Par convexité de C, on a que

$$(\alpha+\beta)^{-1}(x+y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\alpha^{-1}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\beta^{-1}y \in C$$

Ainsi, $p(x+y) \leq \alpha + \beta$. Par passage à la borne inférieure sur α et β, on obtient le résultat. □

LEMME : Soit $C \subset E$ un convexe non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$. En particulier, l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Démonstration. Quitte à translater, on peut toujours supposer que $0 \in C$. On pose $G := \mathbb{R}x_0$ et la forme linéaire g définie sur G par :

$$g(tx_0) = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

On a alors que $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$. En vertu du théorème d'HAHN-BANACH analytique, il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ prolongeant g et telle que $f \leq p$ sur E. En particulier, on a $f(x_0) = g(x_0) = 1$ et f est continue par le lemme précédent. Par ailleurs, on a que $f(x) < 1$ pour tout $x \in C$. □

Revenons au théorème (1). On pose $C = A - B$ de sorte que C est convexe et ouvert. De plus, $0 \notin C$ car $A \cap B = \emptyset$. En vertu du second lemme, on dispose d'un $f \in E'$ tel que pour tout $z \in C$, $f(z) < 0$, *i.e.*, pour tout $(x, y) \in A \times B$, $\ f(x) < f(y)$. On fixe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que :

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

Ainsi, l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare au sens large A et B.

Pour (2), pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on pose $A_\epsilon = A + B(0, \epsilon)$ et $B_\epsilon = B + B(0, \epsilon)$ de sorte que A_ϵ, B_ϵ sont convexes, ouverts ,non vides et disjoints. On dispose alors d'un hyperplan fermé d"équation $[f = \alpha]$ qui sépare A_ϵ et B_ϵ au sens large, si bien que :

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad \forall z \in B(0, 1), \quad f(x + \epsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \epsilon z)$$

On en déduit que :

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad f(x) + \epsilon ||f|| \leq \alpha \leq f(y) - \epsilon ||f||$$

D'où le résultat avec l'hyperplan $[f = \alpha]$ puisque $||f|| \neq 0$. □

Application : Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Si pour tout élément $f \in E'$ tel que $f_{|F} \equiv 0$, on a $f \equiv 0$, alors $\overline{F} = E$.

Démonstration. Par contraposée, supposons $\overline{F} \neq E$. Soit $x_0 \in E \backslash \overline{F}$. On applique le théorème à $A = \overline{F}$ et $B = \{x_0\}$. Il existe donc $f \in E'$ non identiquement nul, tel que l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare au sens strict $\overline{F}$ et $\{x_0\}$. On a :

$$\forall x \in F, \quad f(x) < \alpha < f(x_0)$$

Donc $\lambda f(x) < \alpha$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, d'où $f_{|F} \equiv 0$. □

Remarque :

- Le développement, bien que long, utilise le théorème de HAHN-BANACH analytique. Il faut en connaître son énoncé précis ainsi que sa preuve dans les grandes lignes.