Décomposition de Dunford

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur K. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que :

- d est diagonalisable.
- n est nilpotent.
- d et n commutent.
- d et n son des polynômes en u.

Application : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de polynôme caractéristique scindé, alors s'équivalent :

- u est diagonalisable.
- e^u est diagonalisable.

DÉVELOPPEMENT :

Posons $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $N_i = ker(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$. En vertu du lemme des noyaux + CAYLEY-HAMILTON, $E = \bigoplus_{i=1}^r N_{\lambda_i}$.

LEMME : Soit p_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$. Alors :

- $p_i \in K[u]$.
- $\sum_{i=1}^r p_i = Id$.
- $(i \neq j) \implies (p_i \circ p_j = 0)$.

Démonstration. Notons $M_i = X - \lambda_i$ et $Q_i = \frac{\chi_u}{M_i^{\alpha_i}} = \prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$. Les $(Q_i)_{1\leq i\leq r}$ sont 2 à 2 premiers entre eux, par l'identité de BÉZOUT, il existe $V_1, \ldots, V_r \in K[X]$ tels que $\sum_{i=1}^r V_i(u) \circ Q_i(u) = Id$. Posons alors, pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, $p_i := V_i(u) \circ Q_i(u)$. Alors, on a $\sum_{i=1}^r p_i = Id$. De plus, comme χ_u divise Q_iQ_j pour $i \neq j$, il vient :

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= (V_i(u) \circ Q_i(u)) \circ (V_j(u) \circ Q_j(u)) \\ &= Q_i(u) \circ Q_j(u) \circ V_i(u) \circ V_j(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par commutativité des polynômes en u.
Ainsi, on a $p_i = \sum_{j=1}^r p_i \circ p_j = p_i^2$, donc les $(p_i)_{1\leq i\leq r}$ sont des projecteurs.

Voyons désormais que $Im(p_i) = N_i$ et $Ker(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$:

- Si $y = p_i(x) \in Im(p_i)$, alors
$$M_i^{\alpha_i}(u)(y) = M_i^{\alpha_i}(u) \circ p_i(x) = V_i(u) \circ \chi_u(u)(x) = 0$$
donc $y \in N_i$.
- Si $x \in N_i$, alors $x = \sum_{i=1}^r p_i(x)$, mais $p_j(x) = V_j(u) \circ Q_j(u)(x) = 0$ pour $j \neq i$ car $M_i^{\alpha_i} \mid Q_j$, donc $x = p_i(x) \in Im(p_i)$.

D'où $Im(p_i) = N_i$.

- Pour tout $i \neq j$, on a $N_j \subset ker(p_i)$ donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset ker(p_i)$
- Soit $x \in ker(p_i)$, alors $x = \sum_{j\neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j\neq i} N_j$.

D'où $Ker(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$. □

Existence :
Posons $d = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i \in K[u]$. d est diagonale en considérant une base concaténée des bases $(N_i)_{1\leq i\leq r}$. On pose désormais

$n = f - d = \sum_{i=1}^{r}(f - \lambda_i Id_E) \circ p_i \in K[u]$. On a, pour $q \in \mathbb{N}$, $n^q = \sum_{i=1}^{r}(f - \lambda_i Id_E)^q \circ p_i$. En posant $\alpha = \max_i \alpha_i$, alors $n^\alpha = 0$.

Unicité :
On considère deux décompositions $(d, n), (d', n')$ de u satisfaisant les conditions du théorème. d' et n' commutent avec u donc avec d et n qui sont des polynômes en u. On a donc $d - d' = n - n'$ avec $d - d'$ diagonalisable car d et d' le sont et, de plus, commutent. $n - n'$ est nilpotent par la formule du binôme de Newton (puissance égale à la somme des indices de nilpotence). Or un endomorphisme diagonalisable et nilpotent étant nécessairement nul, il vient $d = d'$ et $n = n'$.

Démonstration. (*Application*) :
D'une part, par unicité de la décomposition de DUNFORD de u, u est diagonalisable si et seulement si $n = 0$. Ainsi, la partie nilpotente de e^u est nulle donc e^u est diagonalisable.

Réciproquement, si e^u est diagonalisable on a donc $e^n = Id$ car e^d est inversible. Ainsi, $P(X) = \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{1}{k!} X^k$ est un polynôme annulateur de n, où α est l'indice de nilpotence de n, ce qui est en contradiction avec la minimalité du degré de π_n, donc $n = 0$ et ainsi, $u = d$ est diagonalisable. □

Remarques :

- Le développement peut être court si bien maîtrisé : on prendra le temps de bien détailler si le temps nous le permet.
- Il faut être en mesure de justifier la décomposition de DUNFORD de l'exponentielle d'un endomorphisme à partir de la sienne.