Théorème (Système de Lotka-Volterra)**.** *Soit* $a, b, c, d, x_0, y_0 > 0$ *On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$(LV) : \begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \\ x(0) = x_0 \ ; \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Les solutions maximales de (LV) *sont périodiques.*

Démonstration. On commence par renoter $X = (x, y)$, de sorte que le problème se réécrive $X'(t) = F(X(t))$ et $X(0) = (x_0, y_0)$. F est C^1 car polynômiale en les coordonées de X, et est donc localement lipschitzienne. On a donc existence et unicité de solutions maximales pour une condition initiale donnée. Soit (X, I) une solution maximale.

Lemme 1. *X est à valeur dans* $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

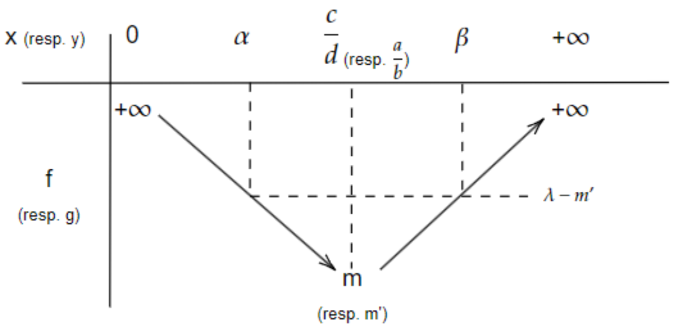
Démonstration. Si par exemple, $\exists t \in I | x(t) \leq 0$, alors, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_1 \in]0, t] | x(t_1) = 0$. Alors X est aussi solution du problème avec les conditions initiales $x(t_1) = 0$; $y(t_1) := y_1$. Mais $t \mapsto \left(0, y_1 e^{-c(t-t_1)}\right)$ est aussi solution. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces deux solutions sont les mêmes, et donc $x_0 = 0$ et c'est absurde. Donc $x > 0$, et de même, $y > 0$. $\square$

Lemme 2. *X est bornée.*

Démonstration. On pose $H(x, y) = dx + by - c \ln x - a \ln y$. Si (x, y) est solution, on a :

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = dx' + by' - c\frac{x'}{x} - a\frac{y'}{y} = d(ax - bxy) + b(dxy - cy) - ca + bcy + ac - adx = 0$$

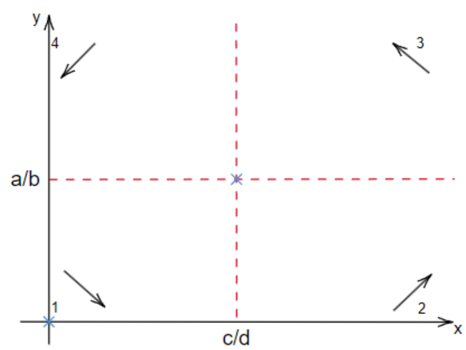
H est donc une *intégrale première du système* sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$. On réécrit $H(x, y) = f(x) + g(y)$. Une étude de fonctions simple montre que f (resp. g) a un tableau de variation de la forme :



On a que f admet un minimum global en c/d nommé m et g admet un minimum global en a/b nommé m'. Avec les notations de la solution maximale, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x(t)) + g(y(t)) = \lambda \ \ \forall t \in I$. On en déduit $f(x(t)) = \lambda - g(y(t)) \leq \lambda - m'$. D'après le tableau de variation ci-dessus, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\alpha \leq x(t) \leq \beta \ \ \forall t \in I$. Donc x est bornée, et y aussi par le même argument. $\square$

D'après le lemme des bouts dans le cas autonome, soit $\sup I = +\infty$ soit $\sup I < +\infty$ et X sort définitivement de tout compact. X étant bornée, on a forcément $\sup I = +\infty$, et de même, $\inf I = -\infty$, et donc $I = \mathbb{R}$.

On découpe $(\mathbb{R}^{+*})^2$ en quatre zones selon les isoclines (en rouge ci dessous) :



Elles font apparaître deux points stables (en bleu) : l'origine et le point $(c/d, a/b)$ (que l'on peut retrouver en résolvant le système $x' = 0$ et $y' = 0$). Les sens de variation se retrouvent, quant à eux, en regardant ce cela signifie en terme d'inégalités que d'être dans chacune des zones, et en réinjectant ces inégalités dans les expressions de x' et y'.

Comme le résultat est trivial pour les solutions constantes, on suppose X non constante. Comme on est de plus dans le cas autonome, les orbites du système forment une partition de l'espace, autrement dit, si deux orbites se croisent en un point, ce sont les mêmes. On va donc supposer de plus que notre solution maximale ne passe jamais par $(c/d, a/b)$. Montrons qu'une telle solution passe par l'intérieur des quatre zones.

Supposons (sans perte de généralité) que l'on commence en t_0 à l'intérieur de la zone 1, et supposons par l'absurde qu'on en sorte jamais. x et y sont alors des fonctions (ultimement-)monotones et bornées, elles ont donc une limite finies en $+\infty$ que l'on note x_∞ et y_∞. D'après les expressions de x' et y', ces deux fonctions ont aussi une limite finie en $+\infty$ qui ne peut-être que zéro (c'est un fait général qu'une solution d'une équation différentielle admettant une limite tend forcément avec un point stationnaire, mais on peut le redémontrer ici facilement avec de l'analyse de prépa). Cette limite est impossible par monotonie de X dans la zone 1. Donc $\exists t_1 > t_0$ tel que $x(t_1) = c/d$ et $y(t_1) \in]0, c/d[$. Il y a donc un moment où on se retrouve à l'intérieur de la zone 2.

On peut reprendre le même raisonnement pour montrer qu'il existe un moment $t_2 > t_1$ où on entre dans la zone 3, puis un moment $t_3 > t_2$ où on entre dans la zone 4, puis un moment $t_4 > t_3$ où on entre dans la zone 1, et donc un autre $t_5 > t_4$ où on sort de la zone 1, autrement dit $x(t_5) = c/d$ et $y(t_5) \in]0, c/d[$ avec $t_5 > t_1$. Or, H est une intégrale première du système, donc $H(X(t_1)) = H(X(t_5))$. Avec $H = f + g$ et les conditions de sortie, on a $g(y(t_1)) = g(y(t_5))$. Mais g est monotone sur $]0, c/d[$, donc $y(t_1) = y(t_5)$, puis $X(t_1) = X(t_5)$. Ainsi, $t \mapsto X(t + t_1)$ et $t \mapsto X(t+t_1)$ sont solutions du même problème de Cauchy en 0. Donc $\forall t \in \mathbb{R}, X(t+t_1) = X(t+t_5)$, soit $X(t) = X(t + (t_5 - t_1))$. X est donc périodique, dont une période est $t_5 - t_1 > 0$. $\square$