[261] Loi d'une v.a. [j'ai fait que le strict min du rapport de jury...]

I) Loi de v.a. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé

Déf1: v.a.

Déf2: Loi d'une v.a.

A) Cas discret - cas à densité. (X v.a. à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$)

Déf3: v.a. à densité + loi: $\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$

Ex4: lancer de 2 dés

Rem5: Loi de v.a. discrète caractérisée par $\mathbb{P}(X=x)$

Ex6: $X \sim \mathcal{B}(p)$ comme $X = 1\!\!1_A$ où A évén.

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$ + interprétation

$X \sim \mathcal{G}(p)$ +

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Déf7: v.a à densité + $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$

Rem8: X à densité $\Rightarrow \mathbb{P}(X=x) = 0$

Ex9: $\cdot\ U \sim \mathcal{U}([a,b])$, $f_U(x) = \frac{1}{b-a} 1\!\!1_{[a,b]}(x)$ | $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

$Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

[CHAB] p.21-22

[CHAB] p.351

[CHAB] p.22

[CHAB] p.352

B) Vecteurs aléatoires:

Déf10: couple de v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $(\mathbb{R}^{\ell}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\ell})) \to \mathbb{P}_{(X,Y)}$

On généralise cette déf à un n-uplet de v.a.; ce qui définit un vecteur aléatoire

Ex11: si (X,Y) couple de v.a. discrètes, $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est caractérisé par $(x,y) \mapsto \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

Déf12: Si $(X_1, \dots, X_n)$ vecteur aléatoires, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, la loi de X_i est dite "marginale"

Prop13: (X,Y) discrètes, $\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y \in E_2} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$ à valeurs dans $E_1 \times E_2$, $\mathbb{P}(Y=y) = \dots$ | (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+m}$ de densité f. La densité de X est: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$.

Rem14: X et Y à densité $\not\Rightarrow$ (X,Y) à densité: si X=Y à densité, le couple (X,X) est à valeur sur la droite $\{y=x\}$ de mesure de Lebesgue nulle.

Rem15: On ne peut pas déduire la loi conjointe à partir de la loi marginale ex de Chab. p.26.

[Mettre ex de vecteur Gaussien] déf [CHAB] p 160

[CHAB] p.25-26

C) Notion d'espérance

Déf17: X intégrable + $\mathbb{E}[X]$

Ex18: si X à densité, si X discrètes... + extension $\mathbb{E}(X_1, \dots, X_d) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d))$

Ex19: espérances de lois usuelles... } fin de [CHAB]

THM20: Formule de transfert (cas $f \geq 0$ et f quelconque) ← voir [B.L] si on veut le voir bien écrit

Rem Appli21: Si $\forall$ fct f mesurable positive (bornée), $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ alors $\mathbb{P}_X = \mu$

Déf21: moment d'ordre k de X + rem $L^p \subset L^q \subset L^1$ $p \leq q$ (+ déf variance ?)

THM22: ≠ Markov + ≠ Bienaymé-Tchebychev

[+ ≠ Hölder, Jensen si on veut]

[CHAB] p.33-38

II) Caractérisation de lois par des fonctions

A) Fonctions de répartitions X v.a. à valeurs réelles

Déf22: F_X

Prop23: $0 \leq F \leq 1$, $F \nearrow$ cad lag, $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{+\infty} F = 1$

Prop24: réciproque ↑ ← enlevé ou admis ... cf Ansl. Ducel Intégrat° ex 2.6) pour l'unicité ...

THM25: F_X caractérise la loi de X

Ex26: 2/3 exemples (~~cf [CHAB]~~) ou suite [B.L]

Prop27: Nbre de pts de continuité de F_X est au + dénombrable

Rem28: si X à densité, $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$ et $f = F'$ p.p.

• Les points de discontinuité de X sont les atomes de $\mathbb{P}_X$ i.e. les $x \in \mathbb{R}$ tq $\mathbb{P}(X=x) > 0$.

• ∃ des v.a. ni discrètes ni à densité ex: $X = 1\!\!1_{[0,\frac12]}(\omega) + \omega 1\!\!1_{[\frac12, 1]}(\omega)$

↳ cf [Annexe] pour schéma de sa fct de rép.

[B.L.] p.47-50

[CHAB] p.23-24

B) Fct KR:

Déf29: $\Phi_X(t) = \dots$

Rem30: $|\Phi_X(t)| \leq 1$, $\Phi_X(0) = 1$, si X de densité f, $\Phi_X = \hat{f}(-t)$

THM31: Φ_X caractérise la loi de X

Ex32: $X \sim \delta_a$; $X \sim \mathcal{E}(1)$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ...

Prop33: Si X admet un moment d'ordre $k \geq 1$, Φ_X est k-fois dérivable et $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

Prop34: Si $\Phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, X admet une densité f donnée par $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Phi_X(t) e^{-ixt} dt$

Rem35: connaître fct KR de certaines lois ⚠ pour CV en loi [ex] comme $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Dév1 Ex36: Calcul de fct KR de $\mathcal{N}(0,1)$ puis $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ grâce au thm de Cauchy (an. cplx).

[B.L.]

[CHAB] p.43

[261] suite (loi v.a.)

II) C) Fonction génératrice : X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

Déf37 : $G_X(s) = \dots$ + rayon de CV ≥ 1

Lemme38 : G_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et G_X caractérise la loi

Prop39 : X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
G m fois dériv. à gauche en 1 $\Leftrightarrow$ X admet un moment d'ordre m [OUV1] pour preuve
Dans ce cas $G_X^{(m)}(1) = \dots$
En particulier $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$, $Var(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$

Ex40 : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(s) = \dots$, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $G_X(s) = \dots$

Prop41 : ~~strictem~~ G_X st croissante, si $p_0 = \mathbb{P}(X=0) \in]0;1[$
G strictement cvx $\Leftrightarrow$ $p_0 + p_1 < 1$

Lemme42 : Les fct génératrice sont utiles pour étudier le processus de Galton-Watson et l'évènement d'extinction de la population, dont la proba est un pt fixe de G_X

[CHAB] p. 41 - 43

III) Notion d'indépendance et applications à la CV en loi :

A) Indépendance de v.a. :

- déf
- exs
- vecteurs gaussiens ?

· KR $\Rightarrow \mathbb{E}$, Φ, G

← j'ai pas envie d'en parler

Déf43 : v.a. indépendantes

THM44 : $(X_1, \dots, X_d)$ indép $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$

Prop45 : $(X_i)_i$ indép $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi$ fct borélienne tq $\forall i$, $\varphi(X_i)$ int, $\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} \varphi(X_i)\right] = \prod \mathbb{E}[\varphi(X_i)]$

Cor46 : $(X_1,\dots,X_d)$ indép $\Leftrightarrow$ $\forall (t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_{(X_1,\dots,X_d)}(t_1,\dots,t_d) = \prod_{i=1}^d \Phi_{X_i}(t_i)$

Prop48 : Cas discret : $(X_1,\dots,X_d)$ ind $\Leftrightarrow \dots$
Cas à densité : ______

[B.L.] p. 80 - 84

Prop49 : (X,Y) v.a. indép, X+Y a pour loi $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$ + déf $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$

Prop50 : $(X_1,\dots,X_d)$ v.a. indép. $G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \times \dots \times G_{X_n}$ (pour X_i discrets)
$\Phi_{X_1+\dots+X_n} = \Phi_{X_1} \times \dots \times \Phi_{X_n}$

Appli51 : Σ de poisson indép $\Leftrightarrow$ poisson...

[CHAB] p. 27 - 29

[CHAB] p. 39 + 42 - 44

[rajouter prop. de vecteurs gaussien si on veut en parler ← B.L. ou CHAB]

B) Convergence en loi :

Déf52 : CV en loi

~~Rem53~~ Props53 : $\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}_0^0 \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}_K^0$) fait dans [QUÉ] astucieux

THM54 : KR avec fct de rép.

Ex55 : $X_n \sim \delta_{1/n}$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_0$

Prop56 : Si v.a. discrète $(X_n)_n$ CV en loi vers X $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$

[Ex57 : approx poissonnienne à val. dans $\mathbb{N}$

Prop57 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, f continue $\Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$

THM58 : Lemme de Slutsky

Lemme58' : $\left[(z_n)_n \subset \mathbb{C},\ z_n \to z,\ (1+\frac{z_n}{n})^n \to \exp(z) \right]$

[CHAB] p. 57 - 62

THM59 : Lévy

Dév 2

Appli60 : TCL

[QUÉ ?]

Appli61 : construction intervalle de confiance pour estimation de moyenne

(+ si tps lien avec les autres types de CV...)

Réf :

[CHAB] - Chabanol - Ruch - Proba et stat...

[B.L.] - Barbe - Ledoux, Proba

(pour dév 1) Fct KR $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$: adapté de [ElAmiF]
2) Lévy + TCL $\rightsquigarrow$ [QUÉ].)