Dev 30 – Nombre de dérangements (Analyse + Algèbre)

Soit $\mathcal{D}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma$ n'a pas de point fixe$\}$ (Un élément de $\mathcal{D}_n$ est appelé un dérangement)

Notons $d_n := |\mathcal{D}_n|$. Alors :

1/ Par des calculs directs de cardinaux, on obtient : $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

2/ On peut retrouver cette expression $\left\{ \begin{array}{l} \text{en établissant l'identité } n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \\ \text{puis en utilisant la série entière } D(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n \end{array} \right.$

3/ On a en fait une forme plus explicite de d_n : $d_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

Preuve :

1/ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, soit $A_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(k) = k\}$. Alors $\mathcal{D}_n = \mathfrak{S}_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$,

d'où $d_n = n! - \left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right|$

Calculons $\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right|$. Par la formule du crible de Poincaré, on a :

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \quad \text{où } S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Mais $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ laissant fixes $i_1, \dots, i_k$, alors :

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |\mathfrak{S}_{n-k}| = (n-k)! \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} 1,$$

or $\{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid i_1 < \dots < i_k\}$ est de cardinal $\binom{n}{k}$

(puisque $\{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid i_1 < \dots < i_k\} \ni (i_1, \dots, i_k) \mapsto \{i_1, \dots, i_k\} \in \{E \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \mid |E| = k\}$ est une bijection),

d'où $S_k = (n-k)! \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!}$

Donc $d_n = n! - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = \boxed{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$ $(*)$

2/ $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, soit $\mathcal{F}_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma$ possède k points fixes$\}$

On voit que $(\mathcal{F}_k)_{1 \le k \le n}$ forme une partition de $\mathfrak{S}_n$, ainsi $n! = |\mathfrak{S}_n| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |\mathcal{F}_k|$.

Calculons $|\mathcal{F}_k|$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

Choisir une permutation de $\mathcal{F}_k$ revient à choisir une partie P de $\{1, \dots, n\}$ à $n-k$ éléments puis à choisir une permutation de P sans point fixe

ainsi $|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{n-k} d_{n-k}$.

Donc $n! = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_{n-k} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$ (1)

• Ainsi $n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} d_k$, càd $\boxed{1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}}$ → (Terme caractéristique d'un produit de Cauchy)

Maintenant, étudions le produit de Cauchy $D(z)\exp(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)$

On a $\begin{cases} RCV\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) = +\infty \text{ par d'Alembert} \\ RCV\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n\right) \geq 1 \text{ car } \left|\frac{d_n}{n!}\right| < 1 \text{ (d'après (1)) et } RCV\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = 1 \end{cases}$

Ainsi, $\forall |z| < \min(+\infty, 1) = 1$,

$$D(z)\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

d'où $$\boxed{D(z) = \exp(-z) \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n\right)}_{(RCV=+\infty)} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)}_{(RCV=1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) z^n}$$

$$D(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$$

Donc $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ par unicité du dvp en série entière, donc $\boxed{d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$

3/ En reprenant $(*)$, on a $\frac{d_n}{n!} = \sum_{h=0}^{n} \frac{(-1)^h}{h!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \exp(-1) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$,

d'où $\frac{d_n}{n!} - \frac{1}{e} = -\sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h!}$, d'où $\boxed{d_n - \frac{n!}{e} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} n!}{k!}}$, $\left(\text{d'où } d_n - \frac{1}{n} < \frac{n!}{e} < d_n + \frac{1}{n}\right)$

$$\boxed{\text{ainsi } \left|d_n - \frac{n!}{e}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \dots < \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} - 1 = \frac{1}{n}}$$

• Si $n \geq 2$, alors on a :

$d_n \leq \left(d_n - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} < \left(d_n + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \leq d_n + 1$, d'où $\overset{(\text{entier})}{d_n} < \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} < d_n + 1$,

donc $d_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ par déf de la partie entière d'un réel.

• Si $n = 1$, alors $d_1 = 0 = \left\lfloor \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ car $0 < \frac{1}{e} + \frac{1}{2} < 1$ (puisque $e > 2$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

Commentaires additionnels :

- Ce dev répond au problème des chapeaux :

  " n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire.

  En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard.

  Quelle est la proba que personne ne reprenne son propre chapeau ? "

Réponse : $\frac{d_n}{n!} = \frac{\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \rfloor}{n!}$

Résultats intermédiaires :

42 • Formule du crible

- Produit de Cauchy de deux séries entières