(105) Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Perrin, Lang, Gourdon, Calais, Tauvel

I / Généralités

· Déf : $\mathfrak{S}_n$ → Lien avec $\mathfrak{S}_E$, $|E| = n$ (Calais, Perrin)

+ cardinal

→ c'est un groupe

· Cycles → orbites

2 cycles à supp disjoints commutent

Ecriture de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en produit de cycles

Générateurs : transpo, ... nbr minimal de transpo (FGN)

· Conjugaison

préservation des cycles $\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots \sigma(i_k))$

· $\mathfrak{A}_n$: déf de la signature, déf de $\mathfrak{A}_n$ → unique sg d'indice 2

généra de $\mathfrak{A}_n$: 3-cycles

+ dvt Frobenius-Zolotarev (BMP)

II / Etude algébrique de $\mathfrak{S}_n$

· Etude de $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$

centre, gpe dérivé → morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$

3-cycles conjugués dans $\mathfrak{A}_n$

simplicité de $\mathfrak{A}_n$ + $\mathfrak{A}_5$ seul gpe simple d'ordre 60

· Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ ↳ + dvt isom exceptionnels

· autom intérieurs :

$n \neq 6$ Tout autom est intérieur

III / Applications

· Théorie des gpes (Cayley)

$|G| = n$: G isomorphe à un sg de $\mathfrak{S}_n$

→ appli : thm de Sylow

· Polynômes symétriques, semi-symétriques (Tauvel)

· Algèbre multilinéaire

action de $\mathfrak{S}_n$ sur les formes n-lin alternées

? ↳ engendrées par déterminant

· Groupe d'isométries

→ isométries du tétraèdre et représentation de $\mathfrak{S}_4$