

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

I/ Sous-groupes distingués et groupes quotients (Galati)

- Définitions: relation d'équivalence à droite, à gauche
classes à droite, à gauche, ensemble quotient.
Sous-groupe distingué
- Sous-groupes distingués: premiers exemples $\{e\}, G$.
 - Si $H \triangleleft G$, alors G/H est muni d'une structure de groupe.
 - $H \triangleleft G$ ssi $\exists f: G \rightarrow G'$ morphisme, $H = \text{Ker } f$.
- exemples: $A_n, SL(E)$
 - Si $H \triangleleft K$ et $H \triangleleft G$, alors $H \triangleleft K$, mais les autres relations sont fausses.
 - Stabilité par intersection, par image réciproque, par image directe si surjective.
 - Sous-groupes d'ordre ? \rightarrow distingués: ex: $A_n, Z/nZ$ dans $D_n, SL(E)$
 - $H \triangleleft G, K \text{ sg de } G \Rightarrow H \triangleleft K \triangleleft G$.
 - $H \triangleleft G \Rightarrow H \triangleleft K \text{ sg de } G \text{ et } H \triangleleft HK$.
- Normalisateurs, déf. $H \triangleleft G$ ssi $N_G(H) = G$, plus gd sg de G dans lequel H est \triangleleft .
- Groupe quotient: propriété universelle, cas où f est surjective.
Sg du gpe quotient
2^e et 3^e thm d'isomorphismes.

II/ Exemples généraux de sgs distingués

- Centre: sg distingué.
si $G/Z(G)$ est monogène alors G est abélien.
- Groupe dérivé
Def, $D(G) \triangleleft G, G/D(G)$ abélien, factorisation par le gpe dérivé
Groupe résoluble (appl à la théorie de Galois)
 \hookrightarrow stabilité par passage au sg, au quotient ex (voir Ferrin)
(Peigné): après avoir rappelé $G \cong G$ pour un groupe abélien fini
 $\rightarrow G \cong G/D(G)$ pour G fini.
- Ideal: distingué
 \rightarrow structure d'anneau sur A/I (Tauvel, algèbre)
Ilangl thm des restes chinois.
- Sous-espace vectoriel \rightarrow distingué: structure d'espace vectoriel (Gomdon)
sur E/F .
Thm du rang $\text{Im } f \cong E/\text{Ker } f$.

III/ Etude d'un groupe à partir de ses sous-groupes distingués.

- Groupes simples (Galati)
 \hookrightarrow abélien \rightarrow cyclique d'ordre premier
ex: A_n simple, $SO_3(\mathbb{R})$ simple
morphisme d'un gpe simple: injectif ou trivial.
- Table de caractères (Peigné)
 \rightarrow clé sur les sg distingués.
- Produit direct et semi-direct (Peigné)
déf du pdt semi-direct, thm, exemples.
appl: classification des groupes d'ordre pq (Est d'ordre 8)
d'ordre