

Groupe opérant sur un ensemble

Exemples et applications

I / Définitions et premiers exemples

- Actions de groupe (Calais)
 - def: action à gauche, def équivalente.
 - exemple: G^n , action de G sur les parties de Ω .
 - (Gobbet) action sur les polyn. à plusieurs indéts (semi-symétriques)
 - def de action fidèle, ex
 - G isomorphe à un sg de S_Ω si l'action est fidèle.
 - factorisation pour "fidéliser" une action.
- Orbites et stabilisateurs (Calais)
 - Relation d'équivalence, def de l'orbite, partition
 - ex: orbites de l'action de \leftrightarrow
 - Matrices de permutation et théorème de Brauer
 - Actions transitives, n -transitives (Perrin), ex: A_n .
 - Stabilisateur d'un point, théorème $[G:G_x] = |\Omega_x|$.
- Action d'un groupe sur lui-même (Perrin)
 - action par translation, thm de Cayley, corollaire
 - action par conjugaison, centralisateur.

II / Action d'un groupe fini

- Formules de dénombrement (Cornles)
 - équation des classes, formule de Burnside, $n(G) \leq \frac{5}{p}$ (FGN alg 1)
- p -groupes (Calais)
 - def, égalité modulo p , cor: centre d'un p -groupe, petit thm de Fermat, thm de Cauchy
- Théorèmes de Sylow (Perrin)
 - def, théorème, corollaire: A_5 seul gpe simple d'ordre 60, groupes d'ordre pq .

III / Applications

- Actions sur un espace de matrices (CG)
 - matrices semblables: D_n (et réunion d'orbites)
 - matrices congruentes \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{R} , ét corp finis
- Actions de groupe et géométrie
 - groupe affine (Audin)
 - action sur les repères affines, sur E (2-transitive)
 - sur les triplets de points non alignés.
 - groupe projectif $PGL_2(K)$ (CG)
 - def de $P^1(K)$, action de $PGL_2(K)$ sur $P^1(K)$.
 - action sur les triplets de droites.
- Représentations et caractères (Cline)
 - def: repr, caractères, repr irréductibles
 - thm de Maschke
 - représentations isomorphes, lien avec le caractère appli: groupe des isométries du tétraèdre régulier