Sylow

Lemme : Soit G un groupe, $|G| = p^\alpha m$ où $p \nmid m$ et soit H un ss-gp de G. Soit S un p-Sylow de G. Alors $\exists a \in G$, $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H

Théorème 1 : Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $|G| = n$. Alors G possède au moins un p-Sylow

Théorème 2 : Soit G un groupe, $|G| = p^\alpha m$ où $p \nmid m$

1) Si H est un p-sous-groupe de G, il existe un p-Sylow S de G tel que $H \subset S$
2) Les p-Sylow sont tous conjugués (et leur nombre $k | n$.)
3) $k \equiv 1 [p]$

Preuve Lemme : Le groupe G opère sur G/S par translation à gauche.
On a $\mathrm{Stab}_G(aS) = aSa^{-1}$ or par restriction, H agit sur G/S et on a $\mathrm{Stab}_H(aS) = aSa^{-1} \cap H$

Montrons que l'un de ces groupes est un p-Sylow :

* Ce sont déjà des p-groupes car S est un p-Sylow
* Montrons que pour un $a \in G$, $[H : aSa^{-1} \cap H] \wedge p = 1$:

D'après la formule des classes, $\left|G/S\right| = \sum_{a \in R} \left| H/(aSa^{-1} \cap H) \right|$ où R est l'ensemble des représentants pour chaque orbites

Or S est un p-Sylow donc $\left|G/S\right| = m$ et $m \wedge p = 1$

Donc $\left[\sum_{a \in R} \left| H/(aSa^{-1} \cap H) \right|\right] \wedge p = 1$. Donc $\exists a_0 \in R$, $\left| H/(a_0 S a_0^{-1} \cap H) \right| \wedge p = 1$.

D'où $a_0 S a_0^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H.

Preuve Théorème 1 : D'après Cayley, $G \simeq$ ss-gp de S_n donc $G \xrightarrow{\varphi} S_n$

Or S_n se plonge dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ via $\phi : S_n \to GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $\sigma \mapsto u_\sigma$ où $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$

Or ϕ est injectif, donc G est isomorphe à $\varphi \circ \phi(G)$, qui est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Donc $\varphi \circ \phi(G)$ admet un p-Sylow, d'après le lemme.

Donc G admet un p-Sylow.

Preuve Théorème 2 :

1)2) On prouve 1 et 2 ensemble.

Si H est un p-groupe de G et S un p-Sylow de G (existe par 1), donc par le lemme, $\exists a \in G$, $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H.

Or H est un p-groupe, donc $aSa^{-1} \cap H = H$.

Donc $H \subset aSa^{-1}$, qui est un p-Sylow de G.

De plus, si H est un p-Sylow, par cardinalité, $H = aSa^{-1}$ et sont donc conjugués.

3) On pose X l'ensemble des p-Sylow de G et on fait opérer G sur X par conjugaison. Soit S un p-Sylow de G, par restriction, S opère sur X. et on a $|X| \equiv |X^S| \ [p]$.

Montrons que $|X^S| = 1$:

- $\forall s \in S$, on a $sSs^{-1} = S$ d'où $S \in X^S$.
- Montrons que c'est le seul : Soit T un p-Sylow de G

  Supposons $T \in X^S$: $\forall s \in S$, $sTs^{-1} = T$.

  On pose $N = \langle S, T \rangle$. On a $T \subset N$, $S \subset N$ qui sont des p-Sylows de N.

  Comme $T \in X^S$, $\forall n \in N$, $nTn^{-1} = T$ donc $T \triangleleft N$.

  Or les p-Sylow sont conjugués, donc $\exists n_0 \in N$, $n_0 T n_0^{-1} = S = T$

  Donc $T = S$ et $|X^S| = 1$.