$O(p,q)$

NH262 p360

Théorème : Soit $p,q \neq 0$. Il existe un homéomorphisme $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

Preuve : $O(p,q) = \{ M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M I_{p,q} {}^tM = I_{p,q} \}$

Soit $M \in O(p,q)$ avec $n = p+q$. Par décomposition polaire, $\exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$.

<u>Montrons que O et S sont dans $O(p,q)$</u> : Soit $T = {}^tMM$, alors $T = S^2$

$O(p,q)$ est stable par transposition, en effet, on a :

$$M \in O(p,q) \Rightarrow M I_{p,q} {}^tM = I_{p,q}$$
$$\Rightarrow {}^tM^{-1} I_{p,q} M^{-1} = I_{p,q} \quad \text{on compose par l'application inverse.}$$
$$\Rightarrow {}^tM^{-1} \in O(p,q) \quad \text{donc } {}^tM \in O(p,q) \text{ car c'est un groupe.}$$

Donc $\underset{S^2}{T} = {}^tMM \in O(p,q)$ (groupe). Comme $T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists U \in S_n(\mathbb{R})$ tq $\exp(U) = T$ car $S_n \simeq S_n^{++}$

On a alors : $T \in O(p,q) \Leftrightarrow T I_{p,q} {}^tT = I_{p,q}$

$$\Leftrightarrow {}^tT = I_{p,q}^{-1} T^{-1} I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow {}^t\exp(U) = I_{p,q} \exp(U)^{-1} I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow \exp({}^tU) = I_{p,q} \exp(-U) I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow \exp({}^tU) = \exp(-I_{p,q} U I_{p,q})$$
$$\Leftrightarrow {}^tU = -I_{p,q} U I_{p,q} \quad \text{car exp est bijective de } S_n \text{ à } S_n^{++}$$
$$\Leftrightarrow \frac{{}^tU}{2} = -I_{p,q} \frac{U}{2} I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow {}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{p,q} \exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I_{p,q} \quad \left(\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in O(p,q)\right)$$

Or on a $\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp^2\left(\frac{U}{2}\right) = \exp(U) = T = S^2$

On en déduit par unicité de la racine carrée que $\exp\left(\frac{U}{2}\right) = S$ et $S I_{p,q} {}^tS = I_{p,q}$

Donc $S \in O(p,q)$ d'où $O = MS^{-1} \in O(p,q)$

Donc la décomposition polaire $M : (OS) \mapsto (OS)$ induit l'homéomorphisme

$$O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R})) \times (O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}))$$

Etudions $O(p,q) \cap O(n)$ et $O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

d'après $I_{p,q} = {}^tO I_{p,q} O$

On écrit $O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$. On a alors $O \in O(p,q) \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tAA - {}^tBB = I_p \\ {}^tAC - {}^tBD = 0 \\ {}^tCA - {}^tDB = 0 \\ {}^tCC - {}^tDD = -I_q \end{cases}$ ⊛

et si $O \in O_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tOO = I_n$ donc $B = C = 0$

Ainsi, ⊛ nous donne ${}^tAA = I_p$ et ${}^tDD = I_q$ donc

$$O(p,q) \cap O_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in O_p(\mathbb{R}), D \in O_q(\mathbb{R}) \right\} \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$$

Pour $O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: On pose $\mathcal{L} : \{ U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid UI_{p,q} + I_{p,q}{}^tU = 0 \}$

On a vu que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

et ainsi que $\exp : \mathcal{L} \longrightarrow O(p,q)$

Ainsi, l'exponentielle réalise un homéo de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L} \simeq O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Or, soit $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}$, où A et $D \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, comme $UI_{p,q} + I_{p,q}{}^tU = 2\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = 0$

Il découle que $\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \right\}$ d'où $\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = pq$

et on a $\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$

Donc $O(p,q) \simeq O_p \times O_q \times \mathbb{R}^{pq}$