GL$_n$(ℂ) est DOC

Théorème : i) $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ii) $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

iii) $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs donc connexe

Preuve :

1) D'après la formule du déterminant $\det : A \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \in \mathbb{K}$.

L'application det est somme et produit de coefficients de A donc continue.

Comme $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est ouvert en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe $(A_k) \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tq $A_k \to A$.

-> Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on prend $A_k = A$.

-> Si A n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre de A.

De plus, $\exists \delta > 0$, tel que $0 < |\lambda| < \frac{1}{\delta} \Rightarrow \lambda$ non valeur propre de A. (En effet, considérons $Sp(A) \setminus \{0\}$, qui est fini et éventuellement vide. Si il est non vide, il possède un min qu'on note m et $\delta > \frac{1}{m}$ convient. Si il est vide, tout $\delta > 0$ convient)

La suite $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k > \delta}$ est donc dans $GL_n(\mathbb{K})$, car sinon $\frac{1}{k}$ serait valeur propre de A et cette suite tend vers A.

3) Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et on veut construire un chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$ reliant A à B.

* Comme $\det : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ A \mapsto \det(A) \end{array}$ est polynomiale en les coefficients de A.

Par conséquent, $P : t \mapsto \det(A(1-t) + tB)$ est polynomiale en t et comme $A \in GL_n(\mathbb{C})$ $P(0) \neq 0$ donc $P \neq 0$

* P étant non nul, il possède un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$. On peut donc tracer un chemin γ dans $\mathbb{C}$ reliant 0 à 1 évitant les zéros de P.

Construisons γ.

Soit $\alpha_m \in Z(P) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0\}$ telle que $\mathrm{Im}(\alpha_m)$ soit minimale et non nulle (possible par finitude de $Z(P)$. On pose $\alpha_m = i$ si $Z(P) \subset \mathbb{R}$.

Alors $\gamma(t) = \begin{cases} t + i t \,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1-t) + i(1-t)\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ convient

En effet, $t = 0$ et $t = 1$ n'annulent pas P car $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\forall t \in]0,1[$ $\gamma(t)$ ne peut pas être racine de P car $0 < \mathrm{Im}(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha_m) < \mathrm{Im}(\alpha_m)$

* Construisons un arc continue dans $GL_n(\mathbb{C})$ reliant A et B.

Soit $\alpha : [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$
$t \mapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B$
qui est une application continue car γ l'est et à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ par construction de γ.

Donc on a bien un chemin reliant A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$