Fischer - Riesz :

Intégration et applications
Daniel Li.

Lemme : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. E est complet $\iff$ Toutes série absolument cvg est cvg.

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $\forall p \in [1, +\infty]$, $L^p(\Omega)$ est complets pour $\|.\|_p$

Preuve Lemme :

$\Rightarrow$ Supposons E complet. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 1} \|x_n\|$ converge.

Montrons que $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ est de Cauchy. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < q$.

On a $\|S_p - S_q\| = \|\sum_{k=p+1}^{q} x_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \|x_k\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ (La série converge donc le reste d'ordre p tend vers 0)

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E complet donc (S_n) converge.

$\Leftarrow$ Supposons que toute série absolument convergente est convergente. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall p, q \geq N_\varepsilon \ \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$.

On peut alors trouver une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $\forall k \geq 1$, $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$.

Ainsi, $\sum_{k \geq 1} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ est CV donc $\sum_{k \geq 1} x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ aussi par hypothèse

Donc (x_{n_k}) converge et est une ss-suite d'une suite de Cauchy dans un EVN donc (x_n) CV

Donc E est complet.

Preuve Théorème : Construisons un candidat limite : Soit $(f_n) \in L^\infty$ telle que $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ CV

Alors pour presque tout $x \in \Omega$, $|\tilde{f}_n(x)| \leq \|\tilde{f}_n\|_\infty$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_\infty$

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \tilde{f}_n(x)$ converge absolument dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(x)$ converge pour pt $x \in \mathbb{R}$

On pose alors pour presque tout $x \in S$; $f(x) = \sum_{n \geq 1} \tilde{f}_n(x)$

Montrons que $\|f - \sum_{n=1}^{N} \tilde{f}_n\| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$: On : $\|f - \sum_{n=1}^{N} f_N\|_\infty = \|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Ainsi, $f \in L^\infty(\Omega)$ et la série converge au sens de la norme $\|.\|_\infty$ donc $L^\infty(\Omega)$ est complet.

Cas $p \in [1,+\infty[$: Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ telle que $\sum \|f_n\|_p$ CV.

On pose $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}_n(x)| \in [0,+\infty]$ et $\phi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |\tilde{f}_n(x)|$

Construisons un candidat limite : D'après Minkowski : $\|\phi_N\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{N} |\tilde{f}_n(x)| \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|\tilde{f}_n(x)\|_p$

$(\phi_N)_N$ est positive et croissante comme somme partielle de termes positifs donc par convergence monotone,

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega \phi_N^p(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{N\to+\infty} \phi_N^p(x)\,dx = \int_\Omega \phi^p(x)\,dx$$

Et par ce qui précède, $\int_\Omega \phi^p(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_\Omega \phi_N^p(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \|\phi_N\|_p^p \leq \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \|\tilde{f}_n\|_p \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_p^p < \infty$

Donc ϕ^p est intégrable et donc fini pour presque tout $x \in \Omega$ donc ϕ est finie presque partout.

D'où $\sum_{n\geq 1} \tilde{f}_n(x)$ converge absolument pour presque tout $x \in \Omega$. Or $\mathbb{R}$ est complet, la CVA entraîne la convergence donc on peut poser pour presque tout $x \in \Omega$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(x)$

Montrons que $\|f - \sum_{n=1}^{N} \tilde{f}_n\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$:

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} \tilde{f}_n\|_p^p = \int_\Omega |f(x) - \sum_{n=1}^{N} \tilde{f}_n(x)|^p\,dx = \int_\Omega \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde{f}_n(x)\right|^p dx \leq \int_\Omega \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{f}_n(x)|\right)^p dx$$

$$= \int_\Omega (\phi(x) - \phi_N(x))^p\,dx.$$

Mais on a $\begin{cases} (\phi - \phi_N)^p \leq \phi^p \in L^1(\Omega) \\ (\phi - \phi_N)^p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \end{cases}$ donc par le Thm de convergence dominée

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} \tilde{f}_n\|_p^p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$