Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

I/ Généralités.

1) Indépendance de deux évènements

Définition 1 : A est dit indépendant de B si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ ou si $\mathbb{P}(B) = 0$.

Proposition 2 : A est indépendant de B $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Exemple 3 : On lance un dé équilibré, on considère $A = \{2,4,6\}$, $B = \{5,6\}$ et $C = \{5\}$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.
A et B sont indépendant mais pas A et C, et B et C.

Remarque 4 : Il ne faut pas confondre incompatibilité et indépendance qui dépend de la probabilité.

Proposition 5 : A et B indépendants $\Leftrightarrow \bar{A}$ et B indépendants
$\Leftrightarrow A$ et $\bar{B}$ indépendants
$\Leftrightarrow \bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants.

2) Indépendance de n évènements :

Définition 6 : On dit que n évènements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellements indépendants si : $\forall I \subset [\![1,n]\!], I \neq \emptyset, \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.
Ils sont dits indépendants dans leur ensemble si : $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Remarque 7 : L'indépendance mutuelle entraine l'indépendance des évènements 2 à 2 mais la réciproque est fausse.

Exemple 8 : On lance 2 fois une pièce équilibrée. $\Omega = \{P,F\}^2$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme. A = « jet 1 = Pile », B = « jet 2 = Pile » et C = « jet 1 et 2 identiques ». A, B et C sont indépendants 2 à 2 mais pas mutuellements indépendants.

Définition 9 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des sous tribus de $\mathcal{F}$. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes si $\forall (A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

II/ Utilisation de la notion d'indépendance.

1) Indépendance et espérance.

Définition 10 : Si X est une v.a.r intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on défini l'espérance de X par : $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$.

Théorème 11 : Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables indépendantes. Alors XY est intégrable et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Définition 12 : Si X, une variable aléatoire, admet un moment d'ordre 2, on défini sa variance par $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$

Définition 13 : Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, on défini la covariance du couple (X,Y) par $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))]$

Définition 14 : Soit (X, Y) deux v.a.r ayant un moment d'ordre 2. On dit que X et Y sont non corrélées lorsque $Cov(X,Y) = 0$.

Théorème 15 : Soient X et Y deux v.a.r, intégrable, indépendantes Alors X et Y ne sont pas corrélées

Remarque 16 : Deux variables aléatoires peuvent être non corrélées sans être indépendantes.

Corollaire 17 : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de carré intégrable. Alors, on a : $\mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$

Théorème 18 : Markov. Soit X une variable aléatoire positive, intégrable. Alors on a : $\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Proposition 19 : Inégalité de Hoeffding : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes bornées P.ps et centrées. On suppose $|X_n| \leq c_n$ P-Ps, avec $c_n > 0$. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$$

2) Indépendance et somme de variables aléatoires

Théorème 20 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r définies sur le même espace, indépendantes et qui suivent toutes une loi de Bernoulli de même paramètre p.
Alors leur somme $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Théorème 21 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r définies sur le même espace, indépendantes et telles que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$.

Théorème 22 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r définies sur le même espace, indépendantes et telles que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

3) Indépendance et fonctions de probabilités

Définition 23 : Un vecteur aléatoire $V = (X_1, \dots, X_p)$ admet une densité si il existe $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ positive, dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^p$ existe et vaut 1, et telle que :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p} X_i \leq \alpha_i\right) = \int_{-\infty}^{\alpha_1} \cdots \int_{-\infty}^{\alpha_p} f(x_1, \dots, x_p)\, dx_1 \dots dx_p$$

Théorème 24 : Soient X et Y deux variables à densité respectives f et g. Si X et Y sont indépendantes, alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est $h : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x)\, dt = f * g$.

Théorème 25 : Si $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes de densités $f_{X_1}, \dots, f_{X_p}$ alors le vecteur $V = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ a pour densité $\prod_{i=1}^{p} f_{X_i}$.

Réciproquement, si $V = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ a une densité f qui s'écrit :
$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $f(x_1, \dots, x_p) = f_1(x_1) \dots f_p(x_p)$ où les f_i sont positives et intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes et $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f_{X_i} = \lambda_i f_i$

Exemple 26 : Soit $V = (X, Y)$ de densité $f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

X et Y sont indépendantes car f s'écrit :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\right)\left(e^{-y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)\right)$
et $x \mapsto e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1. D'où $f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) = f_Y(x)$.

Définition 27 : On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction $z \mapsto G_X(z) := \mathbb{E}(z^X)$

Théorème 28 : Si X et Y sont indépendantes, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Application 29 : Soit $X_1, \dots, X_n$ telles que $X_i \sim B(p)$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, indépendantes et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. $G_{S_n}(z) = ((1-p)+pz)^n$.

Définition 30 : On appelle fonction caractéristique d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ la fonction :

$$\phi_\mu : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(x)$$

Théorème 31 : Soient X et Y deux vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$

Théorème 32 : Soient X et Y deux vecteurs aléatoires indépendants, X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et Y dans $\mathbb{R}^p$. Alors le vecteur (X,Y) de dimension $n+p$ admet comme fonction caractéristique la fonction $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $\phi_{(X,Y)}(s,t) = \phi_X(s)\phi_Y(t)$

Théorème 33 : Soient X et Y deux vecteurs aléatoires, X étant à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et Y dans $\mathbb{R}^p$. Si $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ $\phi_{(X,Y)}(s,t) = \phi_X(s)\phi_Y(t)$. Alors X et Y sont indépendants.

III / Applications

1) Théorème Limites.

Théorème 34 : Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'évènements indépendants. Si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge, Alors $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n) = 1$.

Théorème 35 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de V.A 2 à 2 indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n = \frac{1}{n} S_n$. Alors $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$

Théorème 36 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VA 2 à 2 indépendantes, de même loi μ. On suppose que μ a un moment d'ordre 2. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[p.s]{} \mathbb{E}(X_1)$

Théorème 37 : Limite central : i) Si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ alors $\frac{S_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X))$

ii) Si $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi, alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ et la loi limite est normale centrée de variance $\mathrm{Var}(X)$.

2) Marche aléatoire :

Définition 38 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuée à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$; $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. forme une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Définition 39 : - La marche est dite recurrente si $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) = +\infty$

- La marche est dite transciente si $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) < +\infty$.

Exemple 40 : Si μ est la mesure uniforme sur $\{x \in \mathbb{Z}^d, \|x\|_1 = 1\}$ On a une marche aléatoire nommée marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$.

Théorème 41 : La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente pour $d = 1, 2$ et transciente si $d \geq 2$.

Escoffier

Kurtzmann-Garet

Proba 1 et 2

Barbe - Ledoux