264

Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Contexte: Dans cette leçon, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désignera un espace de probabilité

I - Généralités

1 - Définitions

Définition 1 Une variable aléatoire réelle X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable

Remarque 2 $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc une v.a.r qui prend toutes les valeurs de $\mathbb{Q}$ est discrète : ses valeurs ne sont donc pas nécessairement isolées.

Exemple 3 Urne avec 3 boules rouges et 4 boules noires. 2 tirages avec remise. $\Omega = \{R_1, R_2, R_3, N_1, N_2, N_3, N_4\}^2$. Mise de 10 € au départ et gain de 8 € par boule rouge obtenue. X v.a.r prenant pour valeur le gain final. $X(\Omega) = \{-10; -2; 6\}$

Définition 4 Donner la loi d'une v.a.r discrète c'est donner $X(\Omega)$ et pour tout $x_i \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x_i)$

Exemple 5 : En reprenant l'exemple 3 et en choisissant pour P la probabilité uniforme, X a pour loi

$X(\Omega)$	-10	-2	6
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{9}{49}$

Propriété 6 : Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$. La donnée de deux familles de réels $(x_i)_{i\in I}$ et $(p_i)_{i\in I}$ tels que $\forall i\ p_i \geq 0$ et $\sum_{i\in I} p_i = 1$ permet de définir une loi de probabilité d'une v.a.r discrète en posant $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $\forall i \in I$, $P(X = x_i) = p_i$

Exemple 7 Soit X d'univers image $X(\Omega) = \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = e^{-2}\frac{2^n}{n!}$

Alors on a bien $P(X=n) \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$

Définition 8 A est dit indépendant de B si $P_B(A) = P(A)$ ou si $P(B) = 0$

Définition 9 : On dit que n évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si $\forall I \subset [\![1, n]\!]$, $I \neq \emptyset$, $P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$

Ils sont dits indépendants dans leur ensemble si $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

2 - Lois usuelles

Définition 10 Soit $p \in [0,1]$. X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$

Contexte 11 : On s'intéresse à un évènement S appelé succès. On définit une v.a.r $X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et si on note $p = P(S)$, $X \sim \mathcal{B}(p)$

Exemple 12 : Dans le cas d'un lancer d'une pièce équilibrée, si X désigne le fait de tomber sur pile $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

Définition 13 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. X suit la loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Contexte 14 : On s'intéresse à un événement S appelé succès. On note $p = P(S)$. On répète n fois l'expérience aléatoire de manière indépendante. On appelle X la v.a.r qui prend pour valeur le nombre de succès obtenus au cours des n réalisations. $X \sim B(n,p)$

Théorème 15 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r définies sur le même espace, indépendantes et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors leur somme $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$

Exemple 16 : Si on lance n fois une pièce équilibrée et que l'on note X le nombre de piles obtenus alors $X \sim B(n, \frac{1}{2})$

Théorème 17 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r définies sur le même espace, indépendantes et telles que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \sim B(n_i, p)$. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(\sum_{i=1}^{n} n_i, p)$

Définition 18 : Soit $p \in]0,1[$. X suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$

Contexte 19 : On s'intéresse à un événement S de probabilité $p = P(S)$. On répète une infinité de fois cette expérience. On appelle X la v.a.r égale au rang d'apparition du premier succès. $X \sim \mathcal{G}(p)$

Exemple 20 : On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on note X le rang du premier lancer où l'on obtient pile. $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

Définition 21 : Soit $\lambda > 0$. X suit la loi de poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

On note alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Contexte 22 : La loi de poisson apparait lorsque l'on compte le nombre de succès au cours d'un nombre d'épreuves très élevées avec une probabilité du succès très faible.

II -

1- Espérance

Définition 23 : Soit X une v.a.r discrète. On appelle espérance de X, le réel, noté $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$ lorsque $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X=x_i)$ lorsque $X(\Omega) = \{x_i, i \geq 1\}$ et que cette série est absolument convergente.

Propriété 24 : L'espérance est linéaire

Théorème 25 : Si X est une v.a.r discrète et g continue par morceaux sur $I \subset X(\Omega)$. Alors $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P(X=x_i)$ sous réserve de convergence absolue

Application 26 : Si $X \sim B(p)$, $E(X) = p$, si $X \sim B(n,p)$, $E(X) = np$. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $E(X) = \frac{1}{p}$. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $E(X) = \lambda$.

Théorème 27 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes centrées. On suppose qu'il existe $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c_n > 0$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |X_n| \leq c_n$ p.s. Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum c_k^2}\right)$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Théorème 28 (Markov) : Si X est intégrable et $t>0$, $P(X \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$

Définition 29 : On appelle moment d'ordre p de X, l'espérance de X^p, si elle existe

Définition 30 : Si X admet un moment d'ordre 2, on définit sa variance par $V(X) = E((X-E(X))^2)$

Remarque 31 : On peut aussi écrire $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Propriété 32 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si X possède une variance, alors $aX+b$ possède une variance et $V(aX+b) = a^2 V(X)$

Théorème 33 : Si X admet une variance, $P(|X-E(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$ $\forall t>0$.

2- Fonctions génératrices

Définition 34 : On appelle fonction génératrice d'une v.a.n X à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction $z \mapsto G_X(z) := E[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) z^k$

Théorème 35 : Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Exemples 36 : Si $X \sim B(p)$, $G_X(z) = (1-p) + pz$

Si $X \sim B(n,p)$, $G_X(z) = ((1-p)+pz)^n$

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

Si $X \sim P(\lambda)$, $G_X(z) = \exp(-\lambda(1-z))$

Théorème 37 : Soit X une v.a de loi sur $\mathbb{N}$. Sur $[0,1[$, $s \mapsto G_X(s)$ est infiniment dérivable et $G_X^{(n)}(s) = E[X(X-1)\cdots(X-n+1) s^{X-n}]$

En particulier $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Théorème 38 Soit X une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors $E(X) < +\infty \Leftrightarrow G_X$ admet une dérivée à gauche en 1
Dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$

III - Comportements limites

1) Convergence en loi

Définition 39 : On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(f(X_n))$ $\forall f$ continue, bornée

Théorème 40 : Si $(X_n)_n$ est une suite de v.a.n telle que $\forall n \geq 1$, $X_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$, $\lambda>0$
Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers $X \sim P(\lambda)$

Théorème 41 (TCL) : Soit (X_n) une suite de v.a.n indépendantes et de même loi admettant une espérance et une variance $V(X) = \sigma^2$
Alors $(\sum_{i=1}^{n} X_i)_n$ centrée et réduite converge vers $\mathcal{N}(0,1)$ en loi.
Soit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nE(X)}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x\right) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Application 42 : La suite de terme général $u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ admet pour limite $\frac{1}{2}$

2) Comportement asymptotique

Définition 43 Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a indépendantes, identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. La suite des sommes partielles $(S_n)_n$ $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ forme une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Définition 44 : La marche est dite récurrente si $\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = 0) = +\infty$. Elle est dite transciente si $\sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = 0) < +\infty$

Exemple 45 : Si μ est la mesure uniforme sur $\{x \in \mathbb{Z}^d, \|x\|_1 = 1\}$, On a une marche aléatoire ~~nommée~~ marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$

Théorème 46 : La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente pour $d = 1,2$ et transciente si $d \geq 3$