262 — Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications

Contexte : Dans cette leçon, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désignera un espace de probabilité.

I- Modes de convergence

1- Convergence presque-sûre

Définition 1 : Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_n$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ converge presque sûrement (p.s) vers la variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si

$P\{\omega \in \Omega \mid \lim X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$

Dans ce cas, on note $\lim_{n \to \infty} X_n = X$ p.s

Proposition 2 : Soient X_n, $n \in \mathbb{N}$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

(i) Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < \infty$ alors $X_n \to X$ p.s

(ii) Si les $(X_n)_n$ sont mutuellements indépendantes, alors $X_n \to 0$ p.s si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$

Exemple 3 : Si $X_i \sim \mathcal{E}(1)$ sont indépendantes et $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ alors $\frac{M_n}{\ln(n)}$ converge vers 1 presque sûrement

Théorème 4 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires centrées telles que $|X_n| \leq c_n$ presque sûrement. Soit $a_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Alors si $\varepsilon > 0$, $P(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$

Corollaire 5 :

Soit $\alpha > 0$. On suppose que $a_n \leq n^{2\alpha - \beta}$ où $\beta > 0$

Alors $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow{p.s} 0$

Dev 1

2- Convergence en probabilité

Définition 6 : Soient X_n et X des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X_n converge en probabilité, et on note $X_n \xrightarrow{P} X$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0$

Exemple 7 : Sur $([0,1], \mathcal{B}or(\mathbb{R}), P)$, pour $\omega \in \Omega$, si $i = 2^n + k - 1$

$X_i(\omega) = \mathbb{1}_{](k-1)/2^n, k/2^n]}(\omega)$ converge en probabilité vers 0.

Théorème 8 : La suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si et seulement si $\lim_{n \to \infty} d(X_n, X) = 0$ où $d(X,Y) = E(|X-Y| \wedge 1)$

Théorème 9 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k$, si la suite (X_n) converge en probabilité vers X, la suite $(f(X_n))_n$ converge en probabilité vers $f(X)$.

3- Convergence dans L^p

Définition 10. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires réelles dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$, $0<p<\infty$. On dit que X_n converge vers X dans L^p si $\lim \|X_n - X\|_p = 0$ où $\|X\|_p = (E(|X|^p))^{1/p}$

Exemple 11. Sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, $f_n = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$ pour $n = 2^n + k$, $0 \le k < 2^n$

Alors $f_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Théorème 12. Soient $p\geq 1$, $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre p. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) La suite $(X_n)_n$ converge dans L^p

ii) La suite $(X_n)_n$ est de Cauchy dans L^p, i.e $\lim_{m,n\to\infty} E(|X_n - X_m|^p) = 0$

4- Convergence en loi

Définition 13. Soit X une variable aléatoire. On définit la fonction de répartition de X par $F_X(t) = E(\mathbb{1}_{]-\infty,t]}(X))$ $t\in\mathbb{R}$.

Définition " : Soient X_n et X des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que X_n converge en loi vers X si $\forall \phi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée, $\int \phi(X_n)dP \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \phi(X)dP$

Théorème 15. Sous les hypothèses précédentes, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff F_{X_n}(t) \to F_X(t)$

II - Liens entre les différents modes de convergence

1-

Théorème 16. La convergence presque-sûre entraîne la convergence en probabilité

Contre-exemple 17. Posons $(a_n)_{n\geq 1}$ de terme général $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$, $l = a_n + q$, $J_l = [\frac{q}{n}, \frac{q+1}{n}[$, $X_l(\omega) = 1$ si $\omega\in J_l$, $X_l(\omega) = 0$ sinon.

Alors $(X_l)_l$ converge en probabilité vers 0 mais ne converge pas presque sûrement

Théorème 18. La convergence L^p entraîne la convergence en probabilité

Contre-exemple 19. Sur $(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), P)$, $X_n(\omega) = \omega^{-\alpha}\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]}(\omega)$ $\alpha>0$, converge en probabilité vers 0 mais ne converge pas dans L^p.

Théorème 20. La convergence presque-sûre et la convergence en probabilité entraînent la convergence en loi

Contre-exemple 21 $X_n = (-1)^n \mathcal{N}(0,1)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ mais ne converge vers $\mathcal{N}(0,1)$ ni presque-sûrement ni en probabilité

Théorème 22: Si $0 < p \leq q$, la convergence dans L^q implique la convergence dans L^p

Contre exemple 23:

contre exemple 24: Sur $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), P)$, $X_n(\omega) = (1-n^{-p})\delta(\omega) + n^{-p}\delta_n(\omega)$ converge presque sûrement vers 0 mais ne converge pas dans L^p vers 0.

2- Uniforme intégrabilité.

Définition 25: Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires réelles définies et intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite équi-intégrable ou uniformément intégrable si $\lim_{c\to\infty} \sup \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| \, dP = 0$

Proposition 26: La famille $(X_i)_{i\in I}$ précédente est uniformément intégrable si et seulement si :

i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \leq \eta \Rightarrow \forall i \in I, \int_A |X_i| \, dP \leq \varepsilon$

et

ii) $\sup_{i\in I} \int |X_i| \, dP < \infty$

Proposition 27: Soient $X_n, n \in \mathbb{N}$ et X des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Supposons X_n intégrable $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

i) $X_n \xrightarrow{P} X$ et $(X_n)_n$ uniformément intégrable.

ii) X intégrable et $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_1 = 0$

III- Théorèmes limite

1- Lois faible et forte des grands nombres

Théorème 28 (loi faible): Si $E(|X|) < \infty$, alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E(X)$ où $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$

Théorème 29 (loi forte): Les deux conditions suivantes sont équivalentes

i) $E(|X|) < \infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = E(X)$ p.s

2- Théorème limite central

Théorème 30: i) Si $E(X^2) < \infty$, alors $\frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, Var(X))$

ii) Si $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi alors $E(X) = 0$ et $E(X^2) < \infty$ et la loi limite est normale centrée de variance $Var(X)$

Dev 2 (+application)

Théorème 31 (TLC poissonien): Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0$, S_n converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.