261 — Loi d'une variable aléatoire : caractérisation, exemples, applications.

I/ Généralités.

1) Définitions :

Définition 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$
2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3) Pour toute suite (A_n) d'éléments 2 à 2 disjoints $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Définition 2 : On appelle variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
On notera v.a.r pour variable aléatoire réelle.

Définition 3 : On appelle loi de probabilité d'une v.a.r X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'application $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, $B \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(B))$

Définition 4 : Si X est une v.a.r intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$, le réel défini par
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

Proposition 5 : L'espérance est linéaire

Définition 6 : - Deux événements A et B sont dit indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- n événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants dans leur ensemble si $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

2) Loi d'une variable aléatoire discrète :

Définition 7 : Une v.a.r X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable

Définition 8 : Donner la loi d'une v.a.r discrète X, c'est donner $X(\Omega)$, et $\forall x_i \in X(\Omega)$ la valeur de $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Proposition 9 : Soit I partie non vide de $\mathbb{N}$. La donnée de 2 familles de réels $(x_i)_{i \in I}$ et $(p_i)_{i \in I}$ tels que :

1) $\forall i \in I$, $p_i \geq 0$ 2) $\sum_{i \in I} p_i = 1$

Permet de définir la loi de probabilité d'une v.a.r discrète X en posant $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $\forall i \in I$, $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$

Exemple 10 : Soit X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = e^{-2}\frac{2^n}{n!}$
On a bien positivité des $\mathbb{P}(X=n)$ et $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X=n) = 1$.

Proposition 11 : Soit X une v.a.r discrète, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ lorsque $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, ou $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ lorsque $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \geq 1}$ et que cette série est absolument convergente.

Théorème 12 : Transfert (Cas discret) : Soit X une v.a.r discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ où $I \subset \mathbb{N}$, non vide. Soit g continue par morceaux définie sur J contenant $X(\Omega)$.
Si $\sum_{i \in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument, Alors $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$

Exemple 13 : Loi de Bernoulli : X suit une loi de Bernoulli, de paramètre $p \in [0,1]$, si : 1) $X(\Omega) = \{0,1\}$
2) $\mathbb{P}(X = x) = (1-p)\delta_0(x) + p\delta_1(x)$
et on a $\mathbb{E}(X) = p$.

Exemple 14 : Loi Binomiale : X suit une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si : 1) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ 2) $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
et on a $\mathbb{E}(X) = np$.

Exemple 15 : Loi Géométrique : X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ si : 1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ 2) $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
et on a $\mathbb{E}(X) = 1/p$

Exemple 16 : Loi de Poisson : X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si : 1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ 2) $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
et on a $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

3) Loi d'une variable aléatoire à densité :

Définition 17 : Une variable aléatoire X sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ est à densité si il existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx$. La fonction f est appelée densité de $\mathbb{P}$.

Remarque 18 : La fonction f n'est pas unique, il suffit de la modifier en 1 point et on obtient une fonction verifiant les conditions.

Proposition 19 : Soit X une v.a.r de densité f. Alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$, on a $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Remarque 20 : De manière analogue au cas discret, on définit l'espérance de X une v.a.r de densité f par $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$. Sous reserve de convergence absolue de cette intégrale.

Exemple 21 : Loi Uniforme : X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ si elle à pour densité $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

Exemple 22 : Loi exponentielle : X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ si elle à pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Exemple 23 : Loi Normale : X suit la loi normale centrée réduite si elle a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

II / Fonctions associées à une loi

1) Fonction de Repartition :

Définition 24 : Soit X une v.a.r définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de X, l'application $F : \mathbb{R} \to [0,1]$
$x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$

Proposition 25 : Soit F une fonction de repartition, alors F vérifie :
i) F est croissante ii) $F(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ et $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$
iii) F est continue à droite en tout point x de $\mathbb{R}$
iv) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t) = \mathbb{P}(X = x)$.

Théorème 26 (admis) Toute fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que :
1) F croissante 2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ 3) F est continue à droite
est la fonction de repartition d'une v.a.r X.

2) Fonction Caractéristique

Définition 27 : Soit X une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction caractéristique de X, la fonction $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}(x)$

Remarque 28 : On a $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$

Théorème 29 : Si X et Y sont deux variables aléatoires de loi $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ telles $\phi_X = \phi_Y$. Alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

Théorème 30 : Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Alors
i) $\phi_\mu(0) = 1$ ii) $|\phi_\mu| \leq 1$ iii) ϕ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Exemple 31 : Si X suit une loi uniforme sur $[a,b]$, on a
$$\phi_X(t) = e^{i\frac{a+b}{2}} \times \frac{\sin((b-a)t)}{(b-a)t}$$

3) Fonction Génératrice

Définition 32 : Soit X une v.a.r à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est défini par $G_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$s \mapsto \mathbb{E}(s^X)$

Exemple 33 : La fonction génératrice d'une v.a.r X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est $G_X(s) = ((1-p) + pz)^n$

Définition 34 : On dit que X admet un moment d'ordre $p>0$ si X^p est intégrable.

Définition 35 : Si X une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction génératrice des moments la fonction $L^X(s) = \mathbb{E}(e^{sX})$ définie pour les valeurs de s pour lesquelles e^{sX} est intégrable.

Théorème 36 : Soit X une v.a.r de loi μ sur $\mathbb{N}$. Sur $[0,1[$ la fonction G_X est infiniment dérivable et ses dérivées sont toutes positives, avec $G_X^{(n)}(s) = \mathbb{E}\left(X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n}\right)$

On a aussi $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition 37 : Pour X une v.a.r à valeur dans $\mathbb{N}$. On a
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_X(t) = G_X(e^{it}).$$

III / Applications

1) Convergence en loi.

Définition 38 : Soient X_n, $n \in \mathbb{N}$ et X des v.a.r définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X_n converge en loi vers X lorsque $\int \phi(X_n)\,d\mathbb{P} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int \phi(X)\,d\mathbb{P}$, pour toute fonction continue bornée $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Théorème 39 : Théorème central limite. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.r, indépendante, de même loi que X.

i) Si $\mathbb{E}(X^2)<\infty$, Alors $\dfrac{S_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0, Var(X))$

où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ii) Si $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi, alors $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathbb{E}(X^2)<0$ et la loi limite est normale centrée, de variance $Var(X)$.

Application 40.

2) Inégalité de Hoeffding

Théorème 41 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires centrées telles que $|X_n| \leq c_n$ presque surement. Soit $a_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Alors si $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon) \leq 2\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{2a_n}\right)$

Corollaire 42 : Soit $\alpha>0$, On suppose $a_n \leq n^{2\alpha-\beta}$ où $\beta>0$

Alors $\dfrac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow{p.s} 0$