223

Suites numériques. Convergences, valeurs d'adhérences. Exemples et applications

I/ Suites numériques, limites et valeurs d'adhérences.

1) Premières définitions :

Définition 1 : Soit E un ensemble non vide. On appelle suite à valeurs dans E, toute application $u : D \to E$ où D est une partie de $\mathbb{N}$. Si E est une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on parle de suites numériques.

Définition 2 : Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si $\exists M>0, \forall n\in\mathbb{N}, |U_n|\leq M$

Remarque 3 : Si (U_n) est une suite réelle, (U_n) bornée $\Leftrightarrow$ (U_n) majorée et minorée.

Exemple 4 : La suite définie par $U_n = e^{-n}$ est bornée par 1.

Définition 5 : On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$ quand $n \to +\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon$. Une suite est dite convergente si un tel l existe et divergente sinon.

Théorème : Unicité de la limite.

Exemple 6 : La suite $U_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1

Définition 7 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle sous-suite ou suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Exemple 8 : (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont des sous-suite de (U_n)

Définition 9 : On appelle valeur d'adhérence de (U_n), tout élément de $\mathbb{K}$ limite d'une sous-suite convergente de (U_n)

2) Propriétés :

Proposition 10 : Toute suite convergente est bornée.

Contre-exemple 11 : $U_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

Proposition 12 : Si $U_n \to 0$ et (V_n) bornée alors $U_n V_n \to 0$.

Exemple 13 : $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 14 : Toute suite convergente possède une unique valeur d'adhérence.

Remarque 15 : Une suite qui possède une unique suite d'adherence n'est pas nécessairement convergente. ($U_n = (1-(-1)^n)^n$ n'est pas convergente.

Proposition 16 : $U_n \to l$ et $V_n \to l'$ alors $U_n + V_n \to l + l'$
$U_n V_n \to l l'$

3) Cas particulier des suites réelles.

Théorème 17 : (Gendarmes) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq U_n \leq b_n$ et $a_n \to l$, $b_n \to l$ alors $U_n \to l$.

Définition 18 : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si elles vérifient :

i) (U_n) croissantes et (V_n) décroissantes

ii) $U_n - V_n \longrightarrow 0$

Théorème 19 : Soit (U_n) et (V_n) deux suites adjointes. Alors elles sont convergentes et ont la même limite. $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq l \leq V_n$.

Exemple 20 : $U_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n!}$
Alors les suites convergent vers e.

4) Suites de Cauchy :

Définition 21 : (U_n) est une suite de Cauchy si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,m) \geq N, |U_n - U_m| \leq \varepsilon$.

Proposition 22 : 1) Toute suite convergente est de Cauchy.
2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème 23 : Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.

II / Exemples de suites classiques

1) Suites recurrentes.

Définition 24 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite récurrente d'ordre k si on peut écrire $\forall n \geq k$, $U_n = f(U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots)$

Proposition 25 : Soit (U_n) une suite recurrente d'ordre k. Alors si (U_n) converge vers l et f est continue, alors on a $l = f(l, \ldots, l)$

Théorème 26 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$
Considérons $U_0 \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
Si f est croissante, (U_n) est monotone
Si f est decroissante, $f \circ f$ est croissante, (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont monotone

Théorème 27 : (Gradient à pas optimal) Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$

BLABLA.

2) Suites arithmético-géométriques et homographiques.

Définition 28 : On appelle suites-arithmético-géométrique toute suite (U_n) de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie par $U_{n+1} = aU_n + b$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
Si $a = 1$, la suite est dite arithmetique et $U_n = U_0 + nb$
Si $b = 0$, la suite est dite géometrique et $U_n = b^n U_0$

Théorème 29 : Si $b = 0$ et $|a| > 1$, (U_n) diverge
Si $b = 0$ et $|a| < 1$, (U_n) converge vers 0
Si $b = 0$ et $a = 1$, (U_n) est constante.

Définition 30 : On dit que (U_n) verifie une recurrence homographique si elle verifie $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n)$ où $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$.

Proposition 31 : Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une série complexe homographique.
Considérons l'équation $h(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0$ (E)
- Si (E) admet 2 racines, α et β, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_n - \alpha}{U_n - \beta} = \left(\frac{a - \alpha c}{a - \beta c}\right)^n \frac{U_0 - \alpha}{U_0 - \beta}$
- Si (E) admet une racine double α, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{U_n - \alpha} = \frac{1}{U_0 - \alpha} + \left(\frac{c}{a - \alpha c}\right) n$

Remarque 32 : Ce resultat permet de verifier si (U_n) est définie.

III / Comparaison et vitesse de convergence de suites.

1) Comparaison de suites.

Définition 33 : On dit qu'une suite numérique (U_n) est dominée par une suite réelle positive (α_n), note $U_n = O(\alpha_n)$ si $\exists A \in \mathbb{R}_+$, et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, on a $|U_n| \leq A\alpha_n$.

Exemple 34 : Si (U_n) est bornée, $U_n = O(1)$

Définition 35 : On dit que (U_n) est négligeable devant (α_n), on note $U_n = o(U_n)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ on ait $|U_n| \leq \varepsilon \alpha_n$

Exemple 36 : (U_n) converge $\Rightarrow U_n = o(1)$.

Définition 37 : $(U_n) \sim (V_n)$

Proposition 38 : Si $(U_n) \sim V_n$ et $U_n \to l$ alors $V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

Remarque 39 : La réciproque est vraie si $l \neq 0$.

2) Vitesse de convergence.

Définition 40 : On dit que (U_n) converge géométriquement vers 0 si elle est dominée par une suite géométique (k^n) avec $k \in]0,1[$.

Théorème 41 : Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \to k$, $0 < k < 1$. Alors $U_n \to 0$

Définition 42 : On dit que (U_n) tend vers 0 avec une convergence (au moins) quadratique si elle est dominée par (k^{2^n}) où $k \in]0,1[$

Théorème 43 : (Méthode de Newton)

3) Accélération de convergence.

On suppose (U_n) converge géométriquement de rapport k vers l.

Théorème 44 : Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $U_n = l + \lambda k^n + O(k'^n)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $|k'| < |k| < 1$.

Thm 45 :

El Amrani.