260

Tony Sandoval
Nocturno
Le cadavre et le sofa

NOM : FROT **Prénom :** Robin **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 260 Espérance, variance, moments de variables aléatoires

Autre sujet : GW

Ref : OUVRARD, Billingsley, Barbe-Ledoux, Cottrel, (Benaïm)

→ Manque d'exple.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Les variables aléatoires considérées seront à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ou dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

I Notions d'espérance et de variance.

1) Espérance et moments.

Def 1 Soit $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, l'espérance de X est le réel $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$

Rem 2 Si $\mathbb{E}[X] = 0$, on dit que X est centrée.

Ex 3 Si X est discrète, on a
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \mathbb{P}(X = n)$$

Def 4 Si $X \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$ $(p \in \mathbb{N})$, on appelle le p-ième moment de X la quantité $\mathbb{E}[X^p]$

Thm 5 (Transfert) Si φ est une fonction telle que $\varphi \circ X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, on a
$$\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \int_\Omega \varphi \circ X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \varphi \, d\mathbb{P}_X$$ où $\mathbb{P}_X$ est la loi de X

Rem 6 On retrouve le résultat de la remarque 2.
Cela permet de calculer $\mathbb{E}(X)$.

Ex 7 Si X est à densité f_X, on a
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, d\lambda(x)$$

Prop 8 Si X et Y sont indépendantes on a $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY]$. $\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$
g, h bornées mesurables

2) Variance et covariance.

Def 9 On appelle variance la quantité $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ et on note σ_X sa racine carrée positive appelée écart type. (pour $X \in L^2$)

Prop 10 On a $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Rem 11 On a $\sigma_X^2 = 0 \Rightarrow X$ est constante

Prop 12 On a
- $\sigma_{aX+b}^2 = a^2 \sigma_X^2$, $a, b \in \mathbb{R}$
- $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ si X et Y sont indépendantes.

Def 13 Soient X et Y dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Alors $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ est bien définie et est appelée covariance de X et Y notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$

Prop 14 On a $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ et $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \mathrm{Cov}(X, Y)$.

Rem 15 Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais la réciproque est fausse.

3) Inégalités utiles.

Prop 16 (Markov) Si $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, on a :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[|X|]$

Prop 17 (Bienaymé-Tchebichev)
Si $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$, alors
$\forall \varepsilon > 0 \ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$

Th 18 : (Jensen) Si ϕ est convexe et $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$,
alors $\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$

Prop 19. (Holder) Si $X \in L^p$, $Y \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
alors $\mathbb{E}[|XY|] = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$

Cor 20 : $p \mapsto \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ est croissante et on a
donc $p \leq q \Rightarrow L^p(\Omega, \mathbb{P}) \subset L^q(\Omega, \mathbb{P})$.

II Fonctions caractéristiques, fonction génératrices.

1) Variables aléatoires discrètes et fonctions génératrices

Ici, X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Def 21 Soit $z \in [-1, 1]$, $z^X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, on pose $g_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) z^n$

Prop 22 : g_X caractérise la loi de X et est analytique sur $]-1, 1[$

- De plus, si g_X est n fois dérivable à gauche en 1^-, X admet un moment d'ordre n

on a la formule $g_X^{(n)}(1^-) = \mathbb{E}[X(X-1) \ldots (X-n)]$.
en particulier $g_X'(1^-) = \mathbb{E}[X]$

App 23 (Galton-Watson) $\boxed{\text{DEV 1}}$

Soit $(\xi_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires i.i.d

et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} \end{cases}$

On pose $m = \mathbb{E}[\xi_1^0]$ et $ext = \{\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}$
alors si $m \leq 1$, $\mathbb{P}(ext) = 1$
si $m > 1$, on $\xi_1^{(0)} = 1$ p.s., $\mathbb{P}(ext) \in [0, 1[$

2) Fonctions caractéristiques

X et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Def 24 : On définit la fonction caractéristique de X par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Thm 25 : Deux variables aléatoires sont de même loi si elles ont la même fonction caractéristique.

Rem 26 : $|e^{itX}| = 1$ donc φ_X est définie pour tout t.

Thm 27 - ~~Si X est de classe~~ $\boxed{\text{DEV 2}}$

Si X a un moment d'ordre n
φ_X est de classe C^n et $\varphi_X^{(n)}(0) = (i)^n \mathbb{E}[X^n]$

- Si φ_X est ~~[illegible]~~ de classe C^{2n}, X admet un moment d'ordre $2n$ et $E(X^{2n}) = (-1)^n \varphi_X^{(2n)}(0)$.

Prop 28 : Si X et Y sont indépendantes, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Ex 29 : deux somme de loi normale est une loi normale

App 30 : Une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ passe une infinité de fois par 0 presque sûrement, dans $\mathbb{Z}^d$ $d \geq 3$, elle tend presque sûrement vers l'infini.

III Modes de convergence.

Def 31 : (Convergence en probas)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. et X une v.a.
On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers X en probabilité si $P(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.
On note $X_n \xrightarrow{P} X$

Rq 32 : D'après l'inégalité de Markov, il suffit d'avoir $E[|X_n - X|] \to 0$

Th 33 : (Loi faible des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables iid de L^1
On a alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow{P} E[X_1]$.

Th 34 : (Loi forte des grands nombres L^2)
Soit (X_n) une suite de v.a. centrées de L^2, iid
Si $\sum \left(\frac{\sigma_{X_n}}{n}\right)^2$ converge alors $\frac{1}{n}\sum X_k \to 0$ p.s

Def 35 : Une suite (X_n) converge en loi si pour toute fonction continue et bornée, on a $\lim_{n\to+\infty} E(\varphi\circ X_n) = E[\varphi \circ X]$

Th 36 : $X_n \xrightarrow{L} X \iff \varphi_{X_n}(t) = \phi_X(t) \forall t \in \mathbb{R}$

Thm (37) (admis) (central limite)
Soit (X_n) une suite de v.a iid de L^2
On pose $\mu = E[X_1]$, $S_n = X_0 + \dots + X_{n-1}$
et $Y_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma_{X_1}\sqrt{n}}$

Alors $Y_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$

// au int de confiance

Cvgce en mmt $\not\Rightarrow$ cvgce.
C-ex : X_n de loi $\frac{(n-1)}{n}\delta_0 + \frac{1}{n}\delta_n$.
$E(X_n) = 1$

ANNEXE : Espérance et variance des lois usuelles

Cas discret :

Bernoulli :

$\mathbb{P}(X=1)=p \qquad \mathbb{P}(X=0)=1-p$

$\mathbb{E}[X]=p$ et $\sigma_X^2=p(1-p)$

Binomiale : $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$\mathbb{E}[X]=np \qquad \sigma_X^2=np(1-p)$

Poisson : $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$\mathbb{E}[X]=\lambda \qquad \sigma_X^2=\lambda$

géométrique $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^k$

$\mathbb{E}(X)=\frac{1-p}{p} \qquad \sigma_X^2=\frac{1-p}{p^2}$

moments empiriques $\underset{\text{TCL}}{\underset{\text{LGN}}{\longleftrightarrow}}$ moments $\longleftrightarrow$ loi

lien moments / indépendance.

lien moments / no° de cvg ce.

axe intense

Cas des lois à densité

Uniforme sur $[a,b]$

densité $f_X(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$

$\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}$ et $\sigma_X^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

Gauss : $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$\mathbb{E}[X]=m \qquad \sigma_X^2=\sigma^2$

Exponentielle $\lambda>0$

$f_X(x)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,\lambda e^{-\lambda x}$

$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_X^2=\frac{1}{\lambda^2}$

Cauchy : $f_X(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

Pas de moment d'ordre 1

Thm des mnts : $X_n \in L^\infty$. X var. $\forall k$ $\mathbb{E}[X_n^k]\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{E}[X^k]$. Alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X$ si X carach. par ses mnts.

Pb des mnts : suite d'entiers, est-ce que suite de mnts. = Pb compliqué !!

↑ pb d'∃ce | pb d'unicité, → critère simple : $\sum \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!}t^k$ a un rayon de cvge $\neq 0$.