205 — Espaces complets. Exemples et applications.

I/ Généralités : On considère (E, d) un espace métrique

1) Suites de Cauchy :

Définition 1 : Soit (U_n) une suite à valeurs dans E. On dit que (U_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ d(U_p, U_q) \leq \varepsilon.$$

Remarque 2 : La condition peut s'écrire : $\forall p, n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon$ implique $d(u_{n+p}, u_n) \leq \varepsilon$.

Exemple 3 : La suite $x_n = \frac{1}{2^n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
La suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy.

Proposition 4 : i) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
ii) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle aussi de Cauchy.
iii) Toute suite de Cauchy est bornée.

Lemme 5 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (E, d).
Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente
Alors (U_n) est convergente de même limite que sa suite extraite.

2) Espaces complets.

Définition 6 : On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.

Théorème 7 : $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace complet.

Exemple 8 : La suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy.

Exemple 9 : Les espaces $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces complets.

Définition 10 : Soit $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$. On note $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{n\geq 0} |x_n|^p$ converge dans $\mathbb{K}$.

Proposition 11 : $(\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \|.\|_p)$ est un espace complets.

Proposition 12 : i) Toute partie complete d'un espace métrique est fermée.
ii) Toute partie fermée dans un espace complet est complete

Application 13 : i) Les segments de $\mathbb{R}$ sont complets.
ii) Dans un espace complets, les compacts sont complets.

II/ Les espaces complets remarquables.

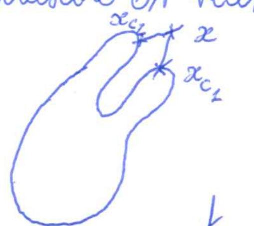
1) Les espaces de Banach et leur utilisation.

Définition 14 : Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach si il est complet.

Exemple 27 : $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 28 : (Projection sur un convexe fermé non vide).
Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel et C un convexe fermé non vide de H. Alors, $\forall x \in H$, $\exists! \, x_C \in C$ tq $\|x - x_C\| = d(x, C)$.
On appelle ce point projection de x sur C et est caractérisé par :
i) $x_C \in C$. ii) $\forall y \in C, \langle x - x_C, y - x_C \rangle \leq 0$.

Remarque 29 : La notion de convexité est nécessaire pour avoir l'unicité du projeté



Corollaire 30 : Si C est un sous-espace vectoriel fermé. On a alors $H = F \oplus F^{\perp}$
ii) Si de plus, C est de dimension finie, alors la projection est caractérisée par :

$$P_F : \begin{array}{l} H \longrightarrow F \\ x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \end{array}$$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq \dim(F)}$ est une base orthonormée de F.

Application 31 : $\inf_{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} |x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma|^2 \, dx = \frac{8}{175}$

2) Notion de base hilbertienne

Définition 32 : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est :
i) Orthonormée : $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$.
ii) Totale : $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}}$

Proposition 33 : La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormée est une base hilbertienne de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si et seulement $\mathrm{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}^{\perp} = \{0\}$.

Exemple 34 : La famille $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base de $L^2_{2\pi}$

Exemple 35 : L'espace de Bergman $H := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ des fonctions de carré intégrable et holomorphe sur le Disque unité ouvert est un espace de Hilbert muni du produit scalaire sur $L^2(\mathbb{D})$ et la famille $\{e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+2}{\pi}} z^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base Hilbertienne de H.

DVPT 2

Proposition 15 : Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Alors E est un espace de Banach.

Notation 16 : On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continue de E dans F.

Proposition 17 : Soit $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach. L'espace $(\mathcal{L}_c(E,F), N)$ est un espace de Banach munit de la norme $N(f) = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$

Théorème 18 : (Point fixe de Picard) Soit (E, d) un espace complet et $f : E \to E$ une application k-contractante. Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme $\begin{cases} u_0 \in E \\ U_{n+1} = f(U_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est convergente vers ce point

Remarque 19 : Dans la pratique, f n'est pas contractante mais on peut souvent se ramener à f^p contractante.

Proposition 20 : Soit (E, d) un espace complet et $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \to E$ telle que f^p soit contractante. Alors f admet un unique point fixe et $\begin{cases} u_0 \in E \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ est convergente vers ce point.

2) Les espaces L^p (pour $p \in [1, +\infty]$)

Définition 21 : On défini les espaces $L^p(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ par :

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\infty < \infty \}$ où $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_p < \infty \}$ où $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Proposition 22 : (Holder) Soit $(p,q) \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors $fg \in L^1$ et $\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Théorème 23 : $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|.\|_p$ est une norme pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Lemme 24 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. E est complet $\iff$ Toute serie normalement convergente est convergente.

Théorème 25 : (Riesz - Fischer). Les espaces $L^p(\Omega)$ sont complets pour $p \in [1, +\infty]$

DVPT 1

III / Le cas Hilbertien

Définition 26 : On dit que H est un espace de Hilbert lorsque H est un espace préhilbertien complet pour la norme associée à son produit scalaire.