160 — Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien

I/ Espaces vectoriels euclidiens

1) Généralités

Définition 1 : Un espace euclidien E est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple 2 : $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un espace euclidien.

Pour la suite de cette leçon, E designera un espace euclidien et $n \geq 1$ sa dimension.

Théorème 3 : (Cauchy-Schwarz) $\forall (x,y) \in E^2$, $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$ avec égalité si et seulement si x est colinéaire à y.

Définition 4 : On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$.

2) Adjoint d'un endomorphisme.

Lemme 5 : Pour toute forme linéaire l sur E, $\exists !\, a \in E$, $\forall x \in E$, $l(x) = \langle a, x\rangle$

Théorème 6 : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists !\, u^* \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$

Définition 7 : Avec les notations précédentes, on dit que u^* est l'adjoint de u.

Proposition 8 : Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$. i) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$ ii) $u^{**} = u$. iii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ iv) $u \in GL(E) \Rightarrow u^* \in GL(E)$ et $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

II/ Les endomorphismes orthogonaux

1) Le groupe orthogonal.

Définition 9 : Une application $f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale si $\forall (x,y) \in E^2$ $\langle f(x) | f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ et on note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.

Exemple 10 : Les seules homothéties $x \mapsto \lambda x$ qui sont des applications orthogonales sont Id et $-Id$.

Théorème 11 : Une application $u : E \to E$ est une application orthogonale si et seulement si, elle est linéaire et $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Proposition 12 : $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ et $\forall u \in \mathcal{O}(E)$ si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

2) Reduction des endomorphismes orthogonaux.

Définition 13 : On appelle matrice orthogonale, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\,{}^tA = {}^tA\,A = I_n$ et on note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ leur ensemble

Exemple 14 : La matrice $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Proposition 15 : $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = \pm 1$ et les seules valeurs propres réelles de A sont ± 1.

Théorème 16 : Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ avec $n \geq 2$. Il existe une base orthonormée B de E telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_r \end{pmatrix}$ où, $\forall k \in [\![1,r]\!]$, $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$

Corollaire 17 : Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_r \end{pmatrix}$

III/ Les endomorphismes symétriques

1) Généralités

Définition 18 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$.

Théorème 19 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Corollaire 20 : $\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \text{ symétrique}\}$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

Exemple 21 : L'application $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x+2y)$ est une symétrie.

2) Théorème Spectral et réduction.

Lemme 22 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles

Lemme 23 : On suppose $n \geq 2$. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors E_λ et E_μ sont orthogonaux

Lemme 24 : On suppose $n \geq 2$. Si λ_1 est une valeur propre de $u \in \mathcal{S}(E)$, $e_1 \in E \setminus \{0\}$ son vecteur propre associé de norme 1 alors $H = (e_1\mathbb{R})^\perp$ est stable par u et $u_{|H}$ est symétrique.

Théorème 25 (Spectral) Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 26 : Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, i.e, $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que, ${}^tPAP$ soit diagonale.

3) Application du théorème Spectral.

Définition 27 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique défini positif s'il est symétrique avec $\langle x \mid u(x) \rangle > 0$ $\forall x \in E$. On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

Proposition 28 : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\lambda > 0$.

Théorème 29 (Décomposition Polaire) : L'application $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O,S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

Théorème 30 : L'application $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $S \mapsto \exp(S)$ est un homéomorphisme. D1

IV / Endomorphismes normaux :

1) Définition

Définition 31 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemple 32 :
- Les endomorphismes symétriques sont normaux
- Les endomorphismes orthogonaux sont normaux

Proposition 33 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

D_2

Lemme 34 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Lemme 35: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Si E_λ est un sous-espace propre de u, alors $E_\lambda^{\perp}$ est stable par u.

Lemme 36: Soit E euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute base B orthonormale de E, $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Théorème 37: Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors, il existe une base orthogonale B de E telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \; \tau_p \end{pmatrix}$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.