159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Dans cette leçon $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel fini de dimension n.

I/ Généralités.

1) Formes linéaires.

Définition 1 : On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est noté E^*, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé dual de E.

Remarque 2 : Une forme linéaire non nulle φ sur E est surjective.

Notation 3 : Si $x \in E$, et $\varphi \in E^*$, on note parfois $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$.

Exemple 4 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) est différentiable, alors Df est une forme linéaire.

Exemple 5 : L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, $A \mapsto f_A : X \mapsto Tr(AX)$ est un isomorphisme.

Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ vérifiant $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $g(XY) = g(YX)$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $g(X) = \lambda Tr(X)$

2) Hyperplans

Définition 6 : On appelle hyperplan de E, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Proposition 7 : Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont liées.

Théorème 8 : Un hyperplan de E est un sous-espace de E supplémentaire à une droite.

Exemple 9 : Si $B = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de E, alors un hyperplan de E est l'ensemble des vecteurs $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$ tq $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ où $\alpha_j = \varphi(e_j)$ sont non nuls.

Théorème 10 : Si H est un hyperplan de E, H est un sous-espace stable de E et $\dim(H) = n-1$.

II/ Structures des espaces duaux.

1) Bases duales et anté-duale.

Définition 11 : Soit $(B = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la forme linéaire e_i^* définie sur B par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ s'appelle forme linéaire de coordonnée d'indice i.

Théorème 12 : Soit $B = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E. Alors $B^* = (e_j^*)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de E^* appelée base duale de B et donc $\dim(E^*) = \dim(E)$. Pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

Exemple 13 : En notant $B = (X^j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la base duale de B est définie $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$ $e_j^*(P) = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$ $0 \leq j \leq n$.

Exemple 14 : Soit $n = 3$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Alors $f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*$, $f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$ est une base de E^*.

Proposition 15 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $e_i^* = f_i$. Cette base s'appelle base anté-duale.

Exemple 17 : La base anté-dual de (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est $\left(\frac{1}{13}(6e_1-2e_2+3e_3), \frac{1}{13}(-3e_1+e_2+5e_3), \frac{1}{13}(-2e_1+5e_1-e_3)\right)$

Théorème 18 : Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi$ sont des formes linéaires sur E telles que $\bigcap_{i=1} Ker(\varphi_i) \subset Ker(\varphi)$. Alors φ est combinaison linéaire des φ_i.

2) Bidual

Définition 19 : On appelle bidual de E et on note E^{**} l'ensemble $(E^*)^*$

Théorème 20 : Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : \begin{array}{l} E^* \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{array}$. Ainsi, $\tilde{x} \in E^{**}$ et l'application $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^{**} \\ x \longmapsto \tilde{x} \end{array}$ est un isomorphisme.

Remarque 21 : Cet isomorphisme ne dépend pas du choix d'une base, il convient alors d'identifier E et E^{**} en identifiant x à $\tilde{x}$ pour $x \in E$.

III/ Orthogonalité et antédualité

1) Orthogonalité

Définition 22 : Une forme linéaire $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ sont dit orthogonaux si $\varphi(x) = 0$

Définition 23 : On appelle orthogonal de X où $X \subset E$, l'ensemble $X^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in X, \varphi(x) = 0\}$.

Si $Y \subset E^*$, on appelle orthogonal de Y l'ensemble $Y^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0\}$

Remarque 24 : Si $\varphi \in E^*$, $Ker(\varphi) = \{\varphi\}^\circ$

Proposition 25 : Soient X_1, X_2 deux parties non vides de E et Y_1, Y_2 deux parties non vides de E^*

i) $X_1 \subset X_2 \Rightarrow X_2^\perp \subset X_1^\perp$ ii) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_2^\circ \subset Y_1^\circ$

iii) $A^\perp = Vect(A)^\perp$ iv) $A \subset (A^\perp)^\circ$, $U \subset (U^\circ)^\perp$ v) $\{0\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\circ = E$, $E^{*\circ} = \{0\}$

Théorème 26 : Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E)$

Pour tout sous-espace vectoriel G de E^*, on a $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$

De plus, $F = (F^\perp)^\circ$ et $G = (G^\circ)^\perp$

Corollaire 27 : Soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ de E^* telles que $rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$. Le sous-espace vectoriel $F = \{x \in E \mid \forall i \ \varphi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n-r$

Réciproquement si F est un sous-espace vectoriel de dimension q. Alors il existe $n-q$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ telles que $F = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n-q]\!], \varphi_i(x) = 0\}$.

Proposition 28 : $(X_1 + X_2)^\perp = X_1^\perp \cap X_2^\perp$, $(X_1 \cap X_2)^\perp = X_1^\perp + X_2^\perp$

$(Y_1 + Y_2)^\circ = Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$, $(Y_1 \cap Y_2)^\circ = Y_1^\circ + Y_2^\circ$

2) Applications transposées

Définition 29 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
$\forall f \in F^*$, on a $f \circ u \in E^*$. L'application linéaire $\begin{array}{l} F^* \longrightarrow E^* \\ f \longmapsto f \circ u \end{array}$ est appelée application transposée de u noté ${}^t u$.

Proposition 30 : Si E et F sont de dimension finie, $rg(u) = rg({}^t u)$
$Im({}^t u) = Ker(u)^\perp$ et on a $Ker({}^t u) = Im(u)^\perp$

Proposition 31 : Soit E, F, G 3 $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$

Alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

Proposition 32 : Un sev F de E est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par ${}^t u$

Remarque 33 : Cette proposition permet de prouver le théorème de trigonalisation simultanée.

IV / Applications

Théorème 34 : (Extremas liées) Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$.

Proposition 35 : $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$.

Thm 36 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est $B_f(0,1)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$.