151

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie)
Rang. Exemples et applications

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

I / Dimension d'un espace vectoriel

1) Familles libres et familles génératrices.

Définition 1: Soit $A \subset E$. On note $Vect(A) = \underset{a \in A}{Vect(a)}$.
On dit que A est une partie génératrice de E si $Vect(A) = E$.

Exemple 2: i) $\mathbb{R} = Vect(1)$ ii) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = Vect\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

Définition 3: Une famille de vecteur $(x_i)_{i \in I}$ de E est dite libre si toute combinaison linéaire $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ vérifie $\lambda_i = 0$ $\forall i \in I$.

Remarque 4: i) $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre, est équivalent à, aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.
ii) Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Théorème 5: Si E est engendré par un nombre fini n de vecteurs ($\exists (x_1, .., x_n) \in E^n$, $E = Vect(x_1, .., x_n)$) toute famille libre a au plus n éléments.

Définition 6: Une famille libre et génératrice de E est appelée base de E.

Exemple 7: i) La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $e_i = (0, .., 0, 1, 0, .., 0)$ où le 1 se situe à la i-ème coordonnées est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
ii) La famille $(X^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition 8: E est un $\mathbb{K}$-ev dit de dimension fini s'il existe une famille génératrice finie de E.

Théorème 9: Soit G un système fini de générateurs de E, $\mathcal{L} \subset G$ un système libre. Alors il existe une base B de E telle que $\mathcal{L} \subset B \subset G$.

Corollaire 10: (Base extraite) De toute famille génératrice de E, on peut en extraire une base de E.

Corollaire 11: (Base incomplète) Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

2) Théorie de la dimension.

Théorème 12: Toutes les bases de E ont le même cardinal n.
L'entier n s'appelle dimension de E et est noté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$

Proposition 13: Soit E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors : i) Tout système libre de n vecteurs de E est une base de E
ii) Tout système générateur de n vecteurs de E est une base de E.

Proposition 15. Soit $E_1, .., E_k$, k sous-espaces vectoriels de E.
Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ si et seulement si, $E = E_1 + .. + E_k$ et $n = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$.

Proposition 14: Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie.

Proposition 16: Soit E_1, E_2 deux sous-espace vectoriel de E. Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et $\dim(E_1+E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$

Corollaire 17: Il y a équivalence entre :
i) $E = E_1 \oplus E_2$ ii) $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$
iii) $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$ et $E = E_1 + E_2$.

II / Rang

1) Rang d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel finis et $f : E \to F$ une application linéaire.

Proposition 18 : L'image d'un sous-espace vectoriel par f est un sous-espace vectoriel.

Proposition 19 : Les ensembles $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des sous-espaces vectoriels et f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$.

Exemple 20 : Les hyperplans de $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels

Définition 21 : On dit que f est de rang fini si $Im(f)$ est de dimension finie et on note $rg(f) = dim(Im(f))$

Exemple 22 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x-y, 3x, y)$ est de rang 2

Proposition 23 : Soit E un ev et F un sev de E. La relation $\mathcal{R}$ définie par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in F$ est une relation d'équivalence sur E. L'espace quotient noté $E/_F$ est un $\mathbb{K}$-ev munit des loi $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$, $\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}$

Définition 24 : Si $E/_F$ est de dimension finie, on dit que f est de codimension finie dans E. On appelle codimension de E dans E l'entier $codim_{\mathbb{K}}(F) = dim(E/_F)$

Proposition 25 : Un sev F de E est de codimension finie dans E si et seulement si F admet un supplémentaire S dans E de dimension finie et $dim(S) = codim(F)$

Théorème 26 : $Im(f)$ est isomorphe à $E/_{Ker(f)}$.

Théorème 27 : (Rang) f est de rang fini et $dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f)$.

Corollaire 28 : Si E et F sont de même dimension. Alors f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Contre-exemple 29 : $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est linéaire surjective mais pas bijective.

2) Rang d'une matrice

Définition 30 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^p$, et on note $rg(A)$. Si A est la matrice d'une application linéaire, $rg(A) = rg(f)$.

Remarque 31 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow rg(A) = n$.

Exemple 33 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Théorème 34 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, Si $rg(A) = r \geq 1$, alors A est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 35 : Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Corollaire 36 : Le rang est invariant par transposition.

III / Applications

1) Dualité

Définition 37 : On appelle espace dual de E, noté E^*, l'ensemble définit par $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Théorème 38 : Si $dim(E) = n$, alors $dim(E^*) = n$ et si $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, alors $B^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ est une base de E^*, appelée base duale de E.

Remarque 39 : Pour tout $l \in E^*$, on a $l = \sum_{i=1}^{n} l(e_i) e_i^*$

Exemple 40 : En notant $B = (1, X, \dots, X^n)$ la base de $\mathbb{K}_n[X]$, on a $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ où $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$. La base duale de B est définie par $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $e_j^*(P) = a_j$ $\forall j \in [\![0,n]\!]$

Théorème 41 : Soit $B^* = (l_i^*)_{1 \le i \le n}$ une base de E^*, il existe une base $B = (f_i)_{1 \le i \le n}$ de E telle que B' soit la base duale de B.

2) Réduction :

Définition 42 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Théorème 43 : (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique de A est annulateur de A.

Proposition 44 : Le polynôme minimal de A, noté Π_A divise χ_A et $\deg(\Pi_A) \le n$.

On considère désormais E un espace vectoriel euclidien

Définition 45 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si $u^* = u$ i.e $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques.

Proposition 46 : $\mathcal{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

Théorème 47 : (Spectral) $\forall u \in \mathcal{S}(E)$, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire 48 : $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Application 49 : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Définition 50 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Lemme 51 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Lemme 52 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si E_λ est stable par u, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Lemme 53 : Soit E euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, n'ayant pas de vp réelles. Pour toute base orthonormale B on a $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $b \neq 0$.

Théorème 54 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\exists B$ base de E, orthonormée tq $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \; \tau_p \end{pmatrix}$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $b_j \neq 0$.

D1