106

# Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension fini $E$, sous-groupe de $GL(E)$. Applications.

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un corps commutatif. $E$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

## I/ Généralités sur le groupe linéaire :

### 1) Le groupe $(GL(E), \circ)$

**Théorème 1 :** Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre :

2) $u$ est injectif
3) $u$ est surjectif.
4) $u$ est un isomorphisme
5) $u$ transforme toute base de $E$ en une base de $E$.

**Définition 2 :** Le groupe linéaire $GL(E)$ est l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires bijectives de $E$ dans $E$.

**Proposition 3 :** Le groupe linéaire $GL(E)$ munit de la composition est un groupe

**Proposition 4 :** La donnée d'une base $B$ de $E$ définit un isomorphisme $\varphi : GL(E) \to GL_n(\mathbb{K})$, $u \mapsto Mat_B(u)$

**Remarque 5 :** Cet isomorphisme n'est pas canonique.

**Proposition 6 :** $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det(u) \neq 0$.

**Proposition 7 :** L'application determinant est un morphisme de $GL(E)$ dans $\mathbb{K}^*$. Son noyau est le groupe spécial linéaire noté $SL(E) \simeq SL_n(\mathbb{K})$ groupe des matrices de déterminant 1.

### 2) Générateurs : Dilatations et transvections.

**Proposition 8 :** Soit $H$ un hyperplan de $E$ et soit $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\det(u) = \lambda \neq 1$ 2) $u$ admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et $u$ est diagonalisable (donc une droite propre $D$ pour $\lambda$)
3) $Im(u - Id) \not\subset H$ 4) Il existe une base $B$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est de la forme $I_n + (\lambda - 1)E_{n,n}$.

**Définition 9 :** On dit que $u$ est une dilatation d'hyperplan $H$, de droite $D$, de rapport $\lambda$ et lorsque $\lambda = -1$, $u$ est appelé une reflexion.

**Proposition 10 :** Soit $H$ un hyperplan de $E$ et $f \in E^*$ tel que $H = Ker(f)$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id$ tel que $u_{|H} = Id_H$. Il y a équivalence entre :

1) $\det(u) = 1$ 2) $u$ n'est pas diagonalisable 3) $D = Im(u - Id) \subset H$
4) $\exists a \in H \setminus \{0\}$, tel que $\forall x \in E$ $u(x) = x + f(x)a$
5) $\exists B$ une base de $E$ tel que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Définition 11 :** On dit que $u$ est une transvection d'hyperplan $H$ et de droite $D$.

**Proposition 12 :** Soit $\tau$ une transvection de droite $D$ et d'hyperplan $H$ et soit $u \in GL(E)$. Alors $u \tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

**Proposition 13 :** Le conjugué dans $GL(E)$ d'une dilatation est une dilatation

**Théorème 14 :** Les transvections engendrent $SL(E)$

**Théorème 15 :** Les transvections et dilatations engendrent $GL(E)$.

### 3) Cardinalités

**Théorème 16 :** Pour tout $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$ on a $|GL(E)| = \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}) = \prod_{k=1}^{n} (q^k - 1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$|SL(E)| = q^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^{n} (q^k - 1)$

Echanger avec groupe orthogonal

$D_1$

## II / Topologie et sous-groupe finis de $GL(E)$

### 1) Topologie

On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme quelconque.

**Proposition 15**: $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Application 16**: $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

**Proposition 17**: $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

~~**Définition 18**: Le groupe $O(E)$ où $E$ est euclidien est l'ensemble $\{u \in \mathcal{L}(E) \mid \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle\}$, qui est isomorphe à $O_n(\mathbb{K})$~~

**Proposition 19**: Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact et admet 2 composantes connexes par arcs.

**Théorème 20**: L'application $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $(O,S) \longmapsto OS$ est un homéomorphisme.

**Application 21**: $GL_n(\mathbb{R})$ admet 2 composantes connexes.

### 2) Matrices de permutations

**Définition 22**: Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit la matrice de permutation $\sigma$, noté $P_\sigma$ est la matrice de passage de la base $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ à la base $B_\sigma = (e_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}$.

**Proposition 23**: Pour tout $x \in E$, où $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ on a $P_\sigma x = (x_{\sigma^{-1}(i)})_{1\leq i\leq n}$.

**Théorème 24**: L'application $\mathfrak{S}_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$, $\sigma \longmapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupe injectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ et $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

**Corollaire 25**: Tout groupe fini d'ordre $n \geq 1$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ où $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p \geq 2$ $p$ premier.

### 3) Groupe orthogonal

**Définition 26**: Une isométrie de $E$ est une application $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire i.e $\forall (x,y) \in E^2$ $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de $E$.

**Proposition 27**: Une isométrie est un automorphisme de $E$ et $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

**Proposition 28**: Soit $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A$ dans $B$. L'application est une isométrie si et seulement si ${}^tAA = A{}^tA = I_n$.

**Proposition 29**: $\forall u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$.

**Théorème 30**: Soit $u \in O(E)$ avec $n \geq 2$. Il existe une base orthonormée $B$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ s'écrit $\begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_k \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ où $\theta_i \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$

## III / Action de groupe sur l'espace des matrices.