Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

I Définitions et premiers résultats

I.1 Espaces compacts

Définition 1. [Gou, p.27] **(Propriété de Borel-Lebesgue)** Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est compact si pour tout recouvrement de X par des ouverts $(U_i)_{i \in I}$, il existe $J \subset I$ fini tel que $(U_j)_{j \in J}$ est un recouvrement de X.

Exemple 2. [Gou, p.27] $\mathbb{R}$ n'est pas compact. On a $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n; n[$.

Proposition 3. *[Gou, p.28]* ***(Aspect dual de la propriété de Borel Lebesgue)*** *L'espace métrique (X, d) est compact si et seulement si pour toute famille de fermés de (X, d) d'intersection non vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection non vide.*

Corollaire 4. *[Gou, p.28] Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.*

Proposition 5. *[Gou, p.28]* ***(Propriété de Bolzano-Weierstass)*** *L'espace métrique (E, d) est compacte si et seulement si de toute suite de points de E, on peut une sous-suite convergente dans E.*

Proposition 6. *[Gou, p.30] Un espace compact est complet.*

Proposition 7. *[Gou, p30] Soit (x_n) une suite d'un espace métrique compact (E, d) admettant une et une seule valeur d'adhérence ℓ. Alors (x_n) converge vers ℓ.*

I.2 Parties compactes

Définition 8. [Gou, p.28] Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $K \subset X$ est dite **compacte** (relativement à (X, d)) si elle est compacte pour la topologie induite par d sur K.

Exemple 9. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, le segment $[a, b]$ est compact.

Proposition 10. *[Gou, p.28]* ***(Stabilité)***

1. *Toute intersection quelconque de parties compactes est compacte.*
2. *Toute union finie de parties compactes est une partie compacte.*

Contre-exemple 11. Une union quelconque de parties compactes n'est pas compacte en général. Par exemple, on a $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n; n]$ qui n'est pas compact.

Proposition 12. *[Gou, p.30] Si A est une partie fermée dans un espace compact X, alors A est compacte.*

Proposition 13. *[Gou, p.30] Une partie compacte de (X, d) est fermée et bornée.*

Contre-exemple 14. La réciproque est fausse en général: dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||a_n X^n + ... + a_0|| = sup(|a_n|, ..., |a_0|)$, la boule unité fermée est fermée et bornée mais pas compacte.

II Fonctions régulières sur un compact

II.1 Fonctions continues sur un compact

Théorème 15. *[Gou, p.31]* ***(Théorème de Heine)*** *Soient (X, d) un espace métrique compact et (Y, δ) un espace métrique et $f : X \to Y$ une application continue. Alors f est uniformément continue.*

Théorème 16. *[Gou, p.228]* ***(Théorèmes de Dini)***

1. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*
2. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Remarque 17. [Hir, p.26] On peut remplacer l'hypothèse "croissante" par "décroissante".

Exemple 18. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [-a,a],\ f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions, réelles qui convergent simplement vers la fonction exp sur $[-a,a]$. La convergence est donc uniforme sur $[-a,a]$.

II.2 Problèmes d'extrema

Proposition 19. *[Gou, p.31] Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Supposons X compact. Alors $f(X)$ est compacte.*

Corollaire 20. *[Gou, p.31] Soient (X,d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons X compact. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.*

Application 21. [Gou, p.33] Soient (X,d) un espace métrique, K un compact non vide de X et F un fermé de X. Supposons que $K \cap F = \emptyset$. Alors $d(F,K) > 0$.

Corollaire 22. *[Gou, p.33] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{||x||\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, f est minorée et atteint son minimum..*

Corollaire 23. *[Gou, p.31] Soient (X,d) un espace métrique compact et (Y,δ) un espace métrique. Soit $f : X \to Y$ une application continue bijective. Alors f est un homéomorphisme.*

II.3 Fonctions dérivables

Théorème 24. *[Gou, p.71]* ***(Théorème de Rolle)*** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 25. *[Gou, p.72]* ***(Théorème des accroissements finis)*** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Contre-exemple 26. Les théorèmes précédents sont faux si f n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons par exemple la fonction f définie par

$$\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}.$$

On a $f(0) = f(2\pi)$ mais pour tout $t \in [0,2\pi]$, $f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

II.4 Point fixe

Théorème 27. *[Gou, p.34]* ***(Théorème du point fixe compact)*** *Soient (X,d) un espace métrique compact, $f : X \to X$ telle que pour tout $(x,y) \in X^2, x \neq y$ implique que $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe et toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $u_0 \in X$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers ce point fixe.*

Contre-exemple 28. Si X est seulement complet, ce résultat est faux en générale : considérer $E = R^+$ et $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x + \frac{1}{1+x} \in \mathbb{R}^+$

Théorème 29. *[Gou, p.52]* ***(Théorème du point fixe de Brouwer)*** *Toute application continue d'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet au moins un point fixe.*

Définition 30. [Rou, p.180] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^m$. Une application $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est globalement lipschitzienne si pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in K, y, z \in \mathbb{R}^m$,

$$||f(t,y) - f(t,z)|| \leqslant k||y-z||$$

Théorème 31. *[Rou, p.180]* ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz global)*** *Soient $\mathbb{R}^m$ muni d'une norme $||.||$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application globalement lipschitzienne. Alors pour tout $t_0 \in I$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = & f(t,y) \\ y(t_0) = & y_0 \end{cases}$$

*admet une unique solution qui est globale (*i.e. *définie sur I tout entier).*

Exemple 32. **(Equation du pendule)** Le système

$$\left\{\begin{array}{rc} u'' = & -sin(u) \\ u(0) = & a \\ u'(0) = & b \end{array}\right.$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple 33. L'existence d'une solution sur tout le domaine de définition ne peut être garanti si f n'est pas globalement lipschitzienne : la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)}$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rc} y' = & y^2 \\ y(0) = & 1 \end{array}\right.$$

mais n'est pas une solution globale.

III Compacité dans les espaces vectoriels normés

III.1 En dimension finie

Théorème 34. *[Gou, p50] Soit E un espace vectoriel normée de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Proposition 35. *[Gou, p50] En dimension finie on a l'équivalence: une partie K est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Théorème 36. *[Mon, p.64] Soient E et F deux espaces vectoriels. Si E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Théorème 37. *[Gou, p.56]* ***(Théorème de Riesz)*** *Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si ses boules fermées sont compactes.*

Corollaire 38. *Si X est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors tout compact de X est d'intérieur vide.*

Exemple 39. L'ensemble des matrices orthogonales

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), M^T M = I_n\}$$

est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Application 40. [Cal, p.338] **[DEV]** La fonction

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,P) & \mapsto & OP \end{array}$$

est un homéomorphisme.

III.2 En dimension infinie

III.2.1 Théorème de Weierstrass

Théorème 41. *[Que, p.518]* ***(Théorème de Weierstrass) [DEV]****Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors, il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

III.2.2 Théorème d'Ascoli

Soit X un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de X dans dans $\mathbb{R}$. (On pourrait remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.) On munit $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ de la norme uniforme $||.||_\infty$.

Définition 42. [Hir, p11] Une partie A d'un espace X est dite **relativement compacte** si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.

Définition 43. [Hir, p37] Une partie $H \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est dite équicontinue en un point $x_0 \in X$ si:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in X,\ d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H,\ |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon.$$

Cette partie H est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.

Exemple 44. Un ensemble de fonctions r-lipschitziennes est équicontinue.

Théorème 45. *[Hir, p39]* ***Théorème d'Ascoli*** *Soit $H \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :*

$$H \text{ est relativement compacte} \iff H \text{ est bornée et équicontinue.}$$

References

[Gou] Xavier Gourdon *Les maths en tête-Analyse*, Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Hir] François Hirsch, Gilles Lacombe *Éléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices*, Masson, 1997.

[Mon] Jean-Marie Monier *Analyse - MP*, Dunod, 5ème édition, 2007.

[Dant] Jean-François Dantzer *Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et Probabilités*, Deboek, 2ème édition, 2007.

[Cal] Philippe Caldero, Jérôme Germoni *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries* Calvage et Mounet, 2017.

[Rou] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, 2015.

[Que] Hervé Queffélec, Claude Zuily *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2013.