Développement : développement asymptotique de la série harmonique

- Isenmann, Pecatte, L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements [p379]

(+ Gourdon Analyse [p202]) FGN oraux X-ENS analyse 1 [p145]

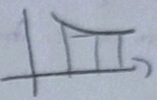
Lemme : Soit $\alpha > 1$. Alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Thm : Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que lorsque $n \to +\infty$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

[Démo du lemme]

Comparaison série-intégrale $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$. Alors, pour tout $k \geq 2$



$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Donc, pour tout $2 \leq n \leq N$, on a

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$\left[\frac{-1}{\alpha-1} \times \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{-1}{\alpha-1} \times \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{n-1}^{N}$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

La série $\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ en N est donc convergente car à termes positifs et majorée par $\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}$. Lorsque $N \to +\infty$, on a donc

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}$$

Or, comme $n^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)^{\alpha-1}$, on en conclut l'équivalent annoncé

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{\underbrace{(n+1)^{\alpha-1}}_{(\sim n)}}$$ □

[Démo du thm]

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, une comparaison série intégrale donne

$$\forall k \geq 1 \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2 \quad \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$$

En sommant ces inégalités, on obtient pour tout $n \geq 1$

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx \leq 1 + \ln n$$

Ainsi $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$. D'où $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

On pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_{n-1} - \ln n$

- $u_n - v_n = \frac{1}{n} \geq 0$ et cv vers 0 en $+\infty$
- $u_n - u_{n+1} = \frac{-1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = \frac{-1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$

  car $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$

Ainsi (u_n) et (v_n) sont adjacentes : elles cv donc vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$.

On pose alors $t_n = u_n - \gamma = H_n - \ln(n) - \gamma$. On va utiliser le lien entre séries et suites : on cherche un équivalent de la suite $(t_n - t_{n-1})$ pour obtenir un équivalent de la somme partielle de la série de terme général $(t_n - t_{n-1})$ qui n'est autre que la suite (t_n).) Pas clair, $\sum_{k=n+1} (t_k - t_{k+1}) = t_n$ car $t_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$u_n - \gamma \to 0$

$$t_n - t_{n-1} = \ln(n-1) - \ln n + \frac{1}{n} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sim \frac{-1}{2n^2}$$

DL de $\ln(1+x)$ en 0

D'après le critère de Riemann la série de terme général $t_k - t_{k-1}$ converge. Par le thm de sommation des équivalents, on sait que les restes sont équivalents. Or, un équivalent du reste de la série de Riemann $\frac{1}{n^2}$ est donné par le lemme et vaut $\frac{1}{n}$.

mettre parenthèses

$$\text{Ainsi } \sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{2k^2} \sim \frac{-1}{2n}$$

somme télescopique

D'où $t_n \sim \frac{1}{2n}$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On pose alors $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$ et on procède de manière similaire pour obtenir : $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{-1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On a donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_{k-1}) = -w_n \sim \frac{1}{2\,6n^2} = \frac{1}{12n^2}$

D'où le développement asymptotique annoncé. □

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$