

3.14 Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d

Leçons : 264, 266.

Référence : [Ben].

Prérequis : définition et propriétés de base chaînes de Markov, états récurrents/transients, formule de Stirling, théorèmes de Fubini.

La marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d est définie par récurrence par $X_0 = 0$, et $X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$, où $(\theta_n)_n$ est une suite de VA i.i.d. de loi uniforme sur les vecteurs de la base canonique $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$. On admet les deux lemmes suivants :

Lemme 1 (admis) : L'état x est récurrent si et seulement si $\sum_{k \geq 0} P^k(x, x) = \infty$, où $P^k(x, y)$ est la probabilité d'arriver sur y en partant de x en k étapes.

Lemme 2 (admis) : Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^d . Alors la fonction $\phi \circ \|\cdot\|$ est intégrable si et seulement si la fonction d'une variable réelle positive $t \mapsto t^{d-1}\phi(t)$ est intégrable.

Théorème : Pour $d = 1$ et 2 , la marche aléatoire est récurrente. Pour $d \geq 3$, elle est transiente.

Preuve. La marche aléatoire est irréductible, donc tous les états sont de même nature. Il suffit ainsi de regarder la nature de l'état 0 , c'est à dire la nature de la série $\sum_{k \geq 0} P^k(x, x) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_k = 0)$ d'après le lemme 1. Or, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $\|X_n\|_1 = \sum_{j=1}^d |X_n^{(j)}|$ est de même parité que n , donc pour tout k impair, $\mathbb{P}(X_k = 0) = 0$. On s'intéresse donc à la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$.

1. Pour $d = 1$: pour $n = 2k$ pair, pour revenir en 0 en n étapes il faut se déplacer autant de fois à gauche qu'à droite. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{k!^2 4^k},$$

donc d'après la formule de Stirling,

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

donc la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est divergente et l'état 0 est récurrent.

2. Pour $d = 2$: on note pour tout $k \geq 0$, $X_k = (X_k^1, X_k^2)$ et $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2)$. On considère les variables aléatoires définies par

$$S_k = \theta_k^1 + \theta_k^2, \quad T_k = \theta_k^1 - \theta_k^2.$$

On peut montrer, en dressant le tableau des valeurs possibles pour θ_k , que S_k et T_k sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher, et ainsi $(\sum_{k=1}^n S_k)_n$ et $(\sum_{k=1}^n T_k)_n$ définissent des marches aléatoires sur \mathbb{Z} . On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \mathbb{P}(X_{2k}^1 = X_{2k}^2 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_{2k}^1 + X_{2k}^2 = X_{2k}^1 - X_{2k}^2 = 0) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} S_i = \sum_{i=1}^{2k} T_i = 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} S_i = 0\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} T_i = 0\right) \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\pi k}, \end{aligned}$$

donc la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est divergente et l'état 0 est récurrent.

3. On suppose maintenant $d \geq 3$. On note φ la fonction caractéristique de θ_1 . On va montrer dans un premier temps que

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \varphi^2(t)} dt,$$

puis que cette intégrale est finie. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} I_d(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle x, t \rangle} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i \sum_{j=1}^d x_j t_j} dt \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i x_j t_j} dt_j \\ &= \mathbf{1}_{\{x=0\}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_{2k}=0\}}] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[I_d(X_{2k})] \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \mathbb{E} \left[\int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle X_{2k}, t \rangle} dt \right] \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi_{X_{2k}}(t) dt \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi(t)^{2k} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \varphi^2(t)} dt, \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Montrons à présent que l'intégrale est finie. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) &= \mathbb{E}[e^{i\langle t, \theta_1 \rangle}] = \mathbb{E} \left[e^{i \sum_{j=1}^d t_j \theta_1^j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{1}{2d} (e^{it_j} + e^{-it_j}) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(t_j) \end{aligned}$$

donc la fonction $1 - \varphi^2$ s'annule en $(0, \dots, 0)$, (π, \dots, π) et $(-\pi, \dots, -\pi)$. On regarde par exemple en $(0, \dots, 0)$, les autres cas étant analogues :

$$\begin{aligned} \varphi^2(t) &= \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(t_j) \right)^2 \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{d^2} \left(\sum_{j=1}^d (1 - t_j^2/2) + o(\|t\|^2) \right)^2 \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \left(1 - \sum_{j=1}^d \frac{t_j^2}{2d} + o(\|t\|^2) \right)^2 \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \sum_{j=1}^d \frac{t_j^2}{d} + o(\|t\|^2), \end{aligned}$$

d'où $\frac{1}{1 - \varphi^2(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{d}{\|t\|^2}$. Or, d'après le lemme 2, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\|t\|^2}$ est intégrable en 0 si et seulement si la fonction $t \mapsto t^{d-1} t^{-2} = \frac{1}{t^{-d+3}}$ est intégrable en 0, soit si et seulement si $d > 2$. Donc, pour $d \geq 3$, la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est convergente et l'état 0 est transcient. □

Remarque. Voir [CR] pour la preuve du lemme 1, et [GK] pour la preuve du lemme 2. Vu le raisonnement du cas $d \geq 3$, on n'a pas forcément besoin de démontrer les cas $d = 1$ et $d = 2$ (puisque'on obtient une équivalence), mais les preuves restent intéressantes et montrent une application de la formule de Stirling.