3.19 Théorème des extrémas liés

Leçons : 151, 159, 206, 215, 219, 267.

Références : [Laf], [Rou].

Prérequis : formes linéaires, base duale/antéduale, sous-variétés, espace tangent.

Définition : Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d si pour tout $m \in M$, il existe un voisinage U de m dans M et $\varphi : U \to \varphi(U)$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}].$$

Définition équivalente (admise) : Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d si pour tout $m \in M$, il existe un voisinage U de m dans M et une application différentiable $F : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $F^{-1}(\{0\}) = M \cap U$ et $\mathrm{d}F(m)$ est surjective.

Lemme : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $b_1, ...b_k$ des formes linéaires indépendantes sur E et $a \in E^*$ tel que $\bigcap_{i=1}^k \ker(b_i) \subset \ker(a)$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, ...\lambda_k$ tels que $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$.

Théorème : Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1, ..., g_k \in \mathcal{C}^1(U)$ et $M = \{x \in U, g_1(x) = ... = g_k(x) = 0\}$. Si $f_{|M}$ admet un extremum local en $m \in M$ et les formes $\mathrm{d}g_i(x)$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_k$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que

$$\mathrm{d}f(m) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathrm{d}g_i(m).$$

Preuve du lemme. La famille $(b_1, ..., b_k)$ est une famille libre d'éléments de E^*, on la complète donc en une base $(b_1, ..., b_n)$ de E^*. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base antéduale associée. Alors

$$\bigcap_{i=1}^k \ker b_i = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n).$$

On a $a \in E^*$, donc il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tel que $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$, et donc d'après l'hypothèse,

$$\forall i \in \{k+1, ..., n\},\ 0 = a(e_i) = \lambda_i,$$

donc $a \in \mathrm{Vect}(b_1, ..., b_k)$.

□

Preuve du théorème. Les étapes de la preuve sont :

1. On montre que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. On montre que $T_m M = T := \bigcap_{i=1}^k \ker(dg_i(m))$ en montrant une inclusion puis l'égalité des dimensions.
3. On montre que $T_m M \subset \ker(df(m))$, puis on conclut avec le lemme.

Etape 1. On considère la fonction $F : U \to \mathbb{R}^k$ définie par $F(x) = (g_1(x), ..., g_k(x))$. Alors $F^{-1}(\{0\}) = M$, F est bien de classe C^1 car les g_i le sont, et pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}F(x) = (\mathrm{d}g_1(x), ..., \mathrm{d}g_k(x))$ est surjective car les formes linéaires $(\mathrm{d}g_i(x))$ sont linéairement indépendantes par hypothèse. Ainsi, d'après la caractérisation équivalente des sous-variétés, M est une sous variété.

Etape 2. Montrons d'abord $T_m M \subset T$. Soit $v \in T_m M$, il existe alors un segment $I \subset \mathbb{R}$ centré en 0 et $\gamma : I \to M$ un chemin de classe C^1 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. Par définition de M, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, $g_i \circ \gamma = 0$, donc en dérivant et en évaluant en 0 : $\mathrm{d}g_i(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 0$, soit $\mathrm{d}g_i(m)(v) = 0$, donc $v \in \ker \mathrm{d}g_i(m)$.

Montrons à présent l'égalité des dimensions. Par définition d'une sous-variété, il existe V un voisinage ouvert de m et $\varphi : V \to \varphi(V)$ un C^1-difféomorphisme tel que $\varphi(V \cap M) = \varphi(V) \cap [\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}]$. On peut supposer que $\varphi(m) = 0$. Montrons que $T_m M = \mathrm{d}\varphi(m)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\})$, ce qui suffira pour conclure que $\dim(T_m M) = n - k = \dim T$. On procède par double inclusion.

- Soit $v \in T_mM$: il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ un chemin de classe C^1 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. On a $\gamma(0) = m \in M \cap V$ donc par continuité on peut supposer que ε est assez petit pour que γ soit à valeurs dans $M \cap V$. Alors $\varphi \circ \gamma$ est un chemin de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$, donc puisque $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$ est fermé, sa dérivée est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$, or $(\varphi \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = \mathrm{d}\varphi(m)(v)$, donc $v \in \mathrm{d}\varphi(m)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\})$.
- Soit $v \in \mathrm{d}\varphi(m)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\})$. On note $w = \mathrm{d}\varphi(m)(v)$. L'application $\phi : t \mapsto tw$ est continue, et $\phi(0) = 0 = \varphi(m) \in \varphi(V)$, donc on peut considérer ε assez petit tel que $\phi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset \varphi(V)$. On a alors $\phi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset \varphi(V) \cap [\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}] = \varphi(V \cap M)$, donc en posant $\gamma = \varphi^{-1} \circ \phi$, γ est un chemin de classe C^1, à valeurs dans M, avec $\gamma(0) = \varphi^{-1}(0) = m$, et $\gamma'(0) = \mathrm{d}\varphi^{-1}(\phi(0))(\phi'(0)) = \mathrm{d}\varphi(\varphi^{-1}(0))^{-1}(w) = v$, donc $v \in T_mM$.

Etape 3. Si $v \in T_mM$ et $\gamma : I \to M$ est un chemin de classe C^1 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$, alors puisque m est un extremum local de f, 0 est un extremum local de $f \circ \gamma$ et $0 = (f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}\varphi(m)(v)$. Donc $v \in \ker(\mathrm{d}f(m))$.

On en déduit ainsi le théorème d'après le lemme.

$\square$

Questions :

1. Applications ?

Réponses :

1. On retrouve le théorème spectral. On peut aussi montrer l'inégalité arithmético-géométrique (voir [Goub] p319) et une caractérisation de $SO_n(\mathbb{R})$ (voir [BMP]).